LIBER AMICORUM
PIET VAN DER HOUWEN

Consider the m-stage Runge-Kutta type formula

$$\vec{y}^{(0)}_{n+1} = \vec{y}_n,$$

$$\vec{y}^{(j)}_{n+1} = \vec{y}_n + \tau \sum_{l=0}^{j-1} \lambda_{jl} \vec{f}^{*}(t_n + \theta_l \tau, \vec{y}^{(l)}_{n+1}), \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{2.1}$$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}^{(m)}_{n+1}, \quad \theta_0 = 0, \; \theta_j = \sum_{l=0}^{j-1} \lambda_{jl}, \quad j = 1, 2, \dots, m-1$$

ANNO MM

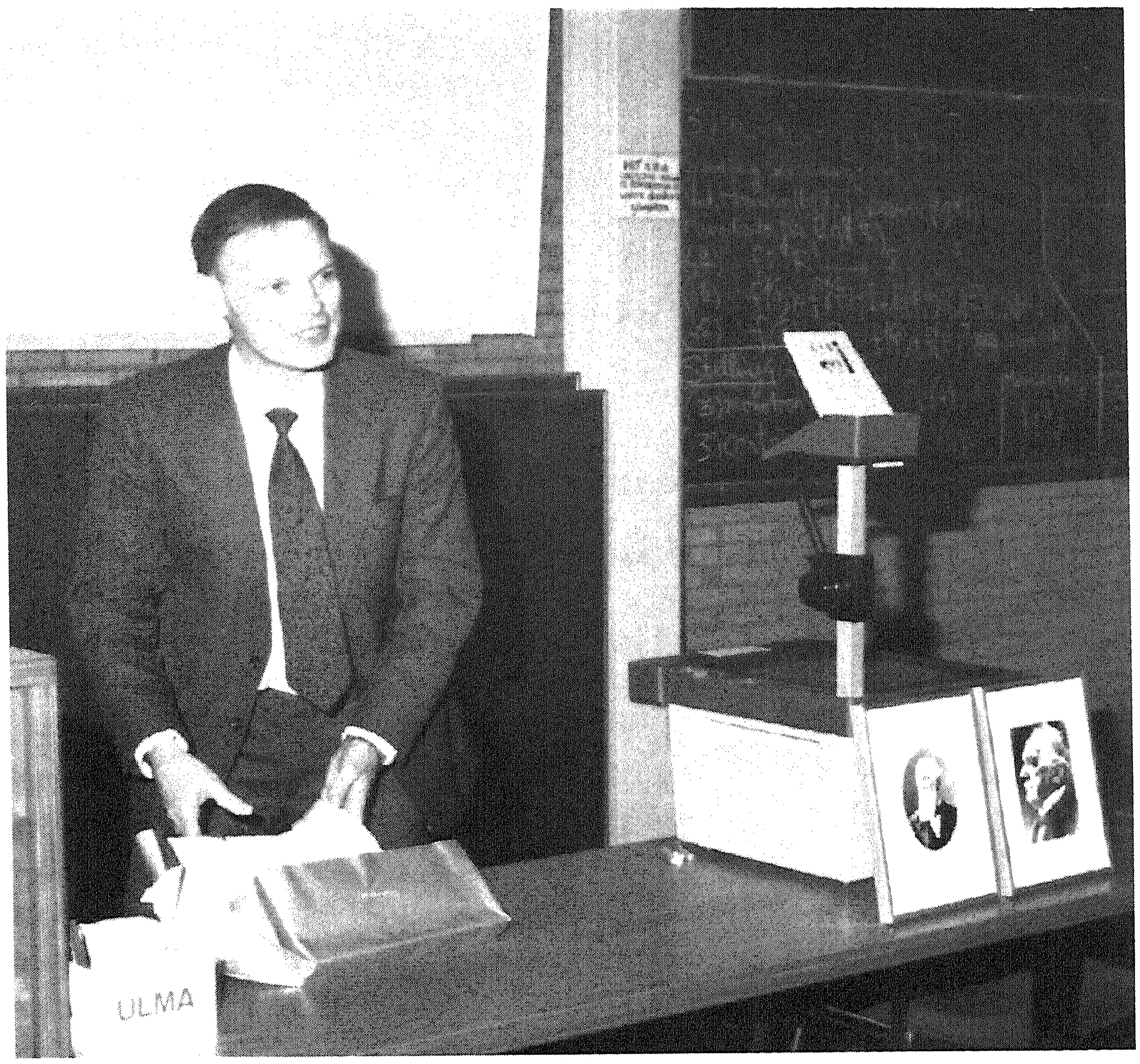
Editor
Herman J.J. te Riele

Layout
Jan Schipper

Cover design
Tobias Baanders

Printing and binding
Ponsen & Looijen, Wageningen

Publication date
October 20, 2000


ULMA

Inhoudsopgave

Deel II Wetenschappelijke bijdragen

VOORWOORD

Na meer dan 36 zeer actieve jaren bij het CWI neemt Piet van der Houwen afscheid. In die lange periode heeft hij zijn sporen verdiend: als wetenschapper, als deeltijdhoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam, als leidinggevende, en als gewaardeerd collega. Piet laat ook duidelijke sporen achter: een indrukwekkende lijst van publicaties van hoge kwaliteit, en een groot aantal promovendi. Kenmerkende eigenschappen van Piet zijn loyaliteit, discipline en plichtsbetrachting. Daarmee was hij als leidinggevende vooral een voorbeeld voor hen aan wie hij leiding gaf en ontwikkelde hij binnen de afdeling Numerieke Wiskunde een eigen cultuur, die nu nog voortleeft in de thema's MAS1 en MAS2.
Piet's rijke wetenschappelijke carrière werd bekroond door zijn benoeming tot eerste CWI Fellow, in 1997. In de jaren van dit Fellowship continueerde hij zijn grote wetenschappelijke productie.
Het curriculum vitae en de vele bijdragen in dit Liber Amicorum geven een beeld van Piet's innemende maar ook zeer veelzijdige persoonlijkheid. Zijn toewijding aan en liefde voor de wetenschap is evident voor een ieder die professioneel met hem te maken heeft. Maar in deze rustige, ingetogen en sobere persoon gaan nog ander passies schuil: Piet is ook een groot liefhebber van muziek en een kenner en genieter van goede wijn.

Graag wil ik hier iedereen bedanken die heeft bijgedragen aan het tot stand komen van dit Liber. Met name wil ik hier de inzet van Herman te Riele noemen.
Het resultaat is een blijk van waardering en een waardig saluut aan Piet van der Houwen. Wij wensen hem en de zijnen van harte alle goeds toe in de volgende fase van zijn leven.

Gerard van Oortmerssen

Verantwoording

Vóór u ligt het resultaat van de op een der volgende pagina's afgedrukte oproep.

Aanvankelijk enigszins schoorvoetend, maar naarmate de reacties binnen kwamen met steeds meer plezier en vertrouwen in een goede afloop, heb ik aan dit "project" gewerkt, omdat steeds duidelijker werd dat zeer velen in dit Liber Amicorum een saluut wilden brengen aan Piet van der Houwen. Een man die ik kort zou willen karakteriseren als $\mathcal{ABC}$: $\mathcal{A}$ccuraat, $\mathcal{B}$eschaafd, $\mathcal{C}$reatief, maar dan wel driemaal voorafgegaan door het woordje *zeer*. Wilt u meer van hem te weten komen, duik dan in dit boek.

Groot bijkomend voordeel van het maken van een Liber Amicorum is dat het velen stimuleert tot reflectie, iets waarvoor in deze jachtige tijden steeds minder tijd beschikbaar is. Dat maakt dit vriendenboek mede tot een historisch document: natuurlijk onvolledig en misschien niet altijd even accuraat, maar het beschrijft zeker de hoofdlijnen, en daarnaast vele interessante details, van Piet's tijd op het Mathematisch Centrum/Centrum voor Wiskunde en Informatica, en aan de Universiteit van Amsterdam.

De reacties zijn heel gevarieerd en ik heb ze in twee delen gerangschikt. Deel I bevat bijdragen met persoonlijke wensen en herinneringen, reis- en congresverslagen, recepten, gedichten, bespiegelingen over wiskunde en fictie, wijn, muziek, taal en zelfs een cryptogram. Deel II bevat een zevental wetenschappelijke bijdragen.

Graag wil ik allen bedanken die aan dit Liber hebben meegewerkt, om te beginnen de auteurs. Als collectivum bezorgen zij hiermee niet alleen Piet, maar ongetwijfeld ook Aly en hun kinderen een mooie herinnering aan Piet's CWI- en UvA-tijd.

Verder wil ik Ben Sommeijer nog apart bedanken. Hij heeft de lijst van promovendi en publicaties van Piet samengesteld —mede met ondersteuning van de bibliotheek van het CWI— en de gegevens voor Piet's CV aangeleverd. Ook heeft Ben goede ideeën aangereikt voor dit Liber, en enkele oude documenten aangeleverd die hierbij zijn gebruikt, zoals de van Piet afkomstige handgeschreven Runge–Kutta formules die u op de omslag van dit Liber kunt terugvinden. Zij lopen als een rode draad door Piet's onderzoek heen.

Verder verdienen dank: Miente Bakker, Walter Lioen, Michiel de Vries, en Nada Mitrovic, voor hun hulp met file en text handling; Jason Frank voor zijn hulp bij de productie van dit Liber; Tobias Baanders voor het ontwerp van de omslag en de lay-out; Francien Goudsbloem voor de ondersteuning door de Publicatiedienst, en Jan Schipper en Jos van der Werf voor het DTP-werk (Desk Top Publishing) en het drukklaar maken van dit boek voor de externe drukker.

Herman te Riele

Oproep

Betreft: Liber Amicorum voor Piet van der Houwen

Lectori salutem! 24 maart, 2000

Na een dienstverband van 36 jaar bij het Centrum voor Wiskunde en Informatica, bij velen van u ook bekend als het Mathematisch Centrum, zal Piet van der Houwen op 1 september gebruik maken van de FPU-regeling om met vervroegd pensioen te gaan.
Op vrijdag 20 oktober zal er een afscheidssymposium voor Piet worden georganiseerd. Daarover zullen nog nadere mededelingen volgen.

Ondergetekende heeft met enkele collega's het plan opgevat om Piet op 20 oktober een afscheidscadeau te geven in de vorm van een Liber Amicorum.

Als u daaraan een bijdrage, in welke vorm dan ook, zoudt willen leveren ((semi-)wetenschappelijk, gastronomisch, over wijn, muziek, literatuur, reizen, taal of wat ook illustratief is voor Piet (en Aly!)'s brede belangstelling) nodig ik u van harte uit dit uiterlijk 1 mei a.s. aan mij kenbaar te maken, zo mogelijk vergezeld van een toelichting over de aard en geschatte omvang van de bijdrage.

De belangrijkste nevenvoorwaarde is eigenlijk dat de bijdrage op de een of andere manier in gedrukte vorm in het Liber kan worden opgenomen.

De bijdrage zelf zou ik gaarne uiterlijk 1 augustus a.s. in mijn bezit willen hebben.

Het spreekt vanzelf dat Piet tot 20 oktober 2000, 5 pm geheel onkundig wordt gehouden van dit initiatief.

Ik zie uw reactie met belangstelling tegemoet!

Herman te Riele

Piet van der Houwen: wetenschapper en practicus

Geboren 31 augustus 1939 in Surabaja (Indonesië)

Na zijn afstuderen aan de Universiteit van Amsterdam in 1964, trad Piet van der Houwen in dienst van het toenmalige Mathematisch Centrum. Hij begon zijn wetenschappelijk onderzoek op de afdeling Toegepaste Wiskunde en werd in 1968 benoemd tot sous-chef van de zo genoemde Rekenafdeling. In deze afdeling werden, naast fundamenteel onderzoek, ook rekenopdrachten voor het bedrijfsleven uitgevoerd. Tevens behaalde hij in dat jaar de graad van doctor in de wiskunde en natuurwetenschappen aan de Universiteit van Amsterdam op een proefschrift getiteld: *Finite difference methods for solving partial differential equations.* Van 1969–1972 bekleedde hij de functie van sous–chef van de afdeling Toegepaste Wiskunde, en in 1973 werd hij benoemd tot chef van de nieuw opgerichte afdeling Numerieke Wiskunde. Deze functie, leiding geven aan een omvangrijke groep jonge onderzoekers en mede-leiding geven aan het instituut, heeft hij met veel overgave en inzet gedurende een periode van bijna 25 jaar vervuld. In 1975 werd Piet van der Houwen benoemd tot bijzonder hoogleraar aan de Universiteit van Amsterdam *vanwege de Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde*, met als leerstoel: 'Numerieke wiskunde en informatica'. Gedurende 25 jaar heeft hij vele studenten, op zeer enthousiaste wijze, de 'kneepjes van het vak' bijgebracht. Deze taak heeft hij per 1 september 2000 wegens emeritaat beëindigd.

Gedurende de jaren 1981-1994 is Piet van der Houwen lid geweest van het bestuur van het Wiskundig Genootschap als Inspecteur der Boekerij en Archivaris van het Genootschap. Hij is (mede)organisator geweest van vele nationale en internationale conferenties, zoals: het Nederlands Mathematisch Congres, de jaarlijkse conferentie van numerici in Woudschoten, en, vanaf 1990, de tweejaarlijks internationale conferentie van numerici 'NUMDIFF' in Halle (in het vroegere Oost-Duitsland). Jarenlang is Piet van der Houwen voorzitter geweest van de Nederlandse delegatie in de wereldwijd opererende IMACS organisatie (International association for MAthematics and Computers in Simulation).

Op vele internationale conferenties is Piet van der Houwen opgetreden als 'invited speaker'. Tevens heeft hij contacten en nauwe samenwerkingsverbanden opgebouwd met vele gerenommeerde onderzoekers van buitenlandse universiteiten. Vooral zijn banden met de Italiaanse onderzoekswereld zijn hecht. Dit heeft o.a. geleid tot diverse gastdocentschappen in dit land. Piet van der Houwen heeft een belangrijke bijdrage geleverd aan de samenwerking tussen de Universiteit van Amsterdam en die van Hanoi, in het bijzonder door een Vietnamese promovendus te begeleiden.

Piet van der Houwen heeft twee boeken en een grote stroom van publicaties in gerenommeerde wetenschappelijke tijdschriften op zijn naam staan (zie de publicatielijst) en een groot aantal promovendi begeleid (zie de lijst van promovendi). Uit de onderwerpen van zijn publicaties blijkt dat zowel theoretische als praktische aspecten z'n warme belangstelling hadden (en nog hebben!). Zo heeft hij fundamentele bijdragen geleverd op het gebied van

- waterbewegings-problematiek (hydrodynamica) in ondiepe zeeën, alsmede het transport van vervuilende stoffen in zulke wateren
- gestabiliseerde Runge-Kutta methoden voor ODEs, afkomstig van zowel gediscretiseerde parabolische als hyperbolische PDEs
- splitmethoden voor PDEs
- Volterra integraal- en integro-differentiaalvergelijkingen
- methoden voor speciale tweede-orde differentiaalvergelijkingen
- delay-vergelijkingen
- ODEs met periodieke oplossingen en het minimaliseren van dispersiefouten
- exponential fitting
- smoothing technieken
- parallelle methoden voor ODEs
- approximate factorization technieken.

Piet van der Houwen is editor of guest-editor geweest van verschillende wetenschappelijke tijdschriften: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Journal of Computational and Applied Mathematics, Applied Numerical Mathematics, Annals of Numerical Mathematics* en *Nieuw Archief voor Wiskunde.*

Ph.D students of P.J. van der Houwen

1. Jan Verwer (23-11-1977)
   On the construction and analysis of stable numerical methods for stiff and parabolic differential equations
2. Kees Dekker (3-9-1980)
   Theoretical and computational aspects of the numerical integration of hyperbolic equations
3. Paul Wolkenfelt (30-9-1981)
   The numerical analysis of reducible quadrature methods for Volterra integral and integro-differential equations
4. Miente Bakker[1] (3-11-1982)
   Aspects of the finite element method
5. Peter Wilders (15-2-1984)
   Minimization of dispersion in difference methods for hyperbolic conservation laws
6. Freddy Wubs (21-10-1987)
   Numerical solution of the shallow-water equations
7. Jan ten Thije Boonkkamp [1] (7-9-1988)
   The numerical computation of time-dependent, incompressible fluid flow
8. Ben Sommeijer (5-2-1992)
   Parallelism in the numerical integration of initial value problems
9. Erik de Goede (19-2-1992)
   Numerical methods for the three-dimensional shallow water equations on supercomputers
10. Paul Zegeling [1] (8-10-1992)
    Moving-grid methods for time-dependent partial differential equations
11. Ron Trompert [1] (26-1-1994)
    Local uniform grid refinement for time-dependent partial differential equations

[1] guided by others

12. Nguyen huu Cong (29-3-1994)
Parallel Runge-Kutta-Nyström methods

13. Maarten van Loon [1] (17-6-1996)
Numerical methods in smog prediction

14. Wolter van der Veen (21-5-1997)
Parallelism in the numerical solution of ordinary and implicit differential equations

15. Jacques de Swart (28-11-1997)
Parallel software for implicit differential equations

16. Edwin Spee [1] (23-1-1998)
Numerical methods in global transport-chemistry models

17. Jason Frank (17-4-2000)
Efficient algorithms for the numerical solution of differential equations

Publications by

P.J. van der Houwen

1966 1 *On the stability of a difference scheme for the North Sea problem,*
P.J. van der Houwen, Report TW 100/66, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1966).

2 *Some analytical aspects of the Tricomi problem,*
P.J. van der Houwen, Report TW 102/66, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1966).

1967 3 *Numerical treatment of the North Sea problem without friction,*
P.J. van der Houwen, Report TN 47/67, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1967).

4 *On the acceleration of Richardson's method, Part 1: Theoretical part,*
P.J. van der Houwen, Report TW 104/67, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1967).

5 *On the acceleration of Richardson's method, Part 2: Numerical aspects,*
P.J. van der Houwen, Report TW 107/67, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1967).

6 *On the acceleration of Richardson's method, Part 3: Applications,*
P.J. van der Houwen, Report TW 108/67, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1967).

7 *1. Differentieschema's voor gewone differentiaalvergelijkingen,*
2. Differentieschema's voor partiële differentiaalvergelijkingen,
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium stabiliteit van differentieschema's*, G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, R.P. van de Riet (eds.), MC Syllabus 2.1, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1967) 18-54.

1968 8 *On the acceleration of Richardson's method, Part 4: A non-symmetrical case,*
T.M.T. Coolen, P.J. van der Houwen, Report TW 109/68, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1968).

9 *1. Het Noordzee-probleem, 2. Elliptische randwaardeproblemen,*
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium stabiliteit van differentieschema's*, L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen, M.N. Spijker (eds.), MC Syllabus 2.2, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1968) 50-87.

10 *Finite difference methods for solving partial differential quations,*
P.J. van der Houwen, Thesis, Univ. of Amsterdam,
also: MC Tract 20, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1968).

1969 11 *A method for solving elliptic difference equation,*
P.J. van der Houwen, Report MR 104/69, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1969).

12 *Difference schemes with complex time steps,*
P.J. van der Houwen, Report MR 105/69, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1969).

13 *Voorlopige handleiding bij het MC-enqueteprogramma, Deel 1: Gebruiksaanwijzing,*
G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen, Report MR 106/69, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1969).

1970 14 *Numerical solution of the diffusion equation by one-step methods,*
P.J. van der Houwen, C.G. van der Laan, Report TN 57/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970).

15 *A diffusion problem with a discontinuous initial condition,*
P.J. van der Houwen, C. de Vreugd, Report TN 58/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970).

16 *On the acceleration of Richardson's method, Part 1: Theoretical part; 2nd ed.,*
P J. van der Houwen, Report TW 104/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970).

17 *One-step methods for linear initial value problems, Part 1: Polynomial methods,*
P.J. van der Houwen, Report TW 119/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970).

18 *One-step methods for linear initial value problems, Part 2: Applications to stiff equations,*
P.J. van der Houwen, Report TW 122/70, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970).

19 *Numerieke oplossingsmethoden,*
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium Elliptische Differentiaalvergelijkingen, Deel 2,* W.P. van den Brink, T.M.T. Coolen, B. Dijkhuis, P.P.N. de Groen, P.J. van der Houwen, E.M. de Jager, N.M. Temme, R.J. de Vogelaere (eds.), MC Syllabus 9.2, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1970) 1-33.

1971 20 *A note on two-step Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, Report TN 61/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971).

21 *Numerical solution of a minimax problem,*
P.J. van der Houwen, J. Kok, Report TW 123/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971).

22 *Stabilized Runge-Kutta methods with limited storage requirements,*
P.J. van der Houwen, Report TW 124/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971).

23 *On the numerical solution of the Tricomi problem,*
P.J. van der Houwen, T.J. Zwaagstra-Eerbeek, Report TW 129/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971).

24 *One-step methods for linear initial value problems, Part 3: Numerical results,*
P.J. van der Houwen, P.A. Beentjes, K. Dekker, E. Slagt, Report TW 130/71, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971).

25 *One-step methods for linear initial value problems,*
P.J. van der Houwen, Z. angew. Math. Mech. 51 (1971) T58-T59.

26 *A survey of stabilized Runge-Kutta formulae,*
P.J. van der Houwen, MC Tract 37, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1971) 5.1-5.20.

1972 27 *Explicit and semi-implicit Runge-Kutta formulas for the integration of stiff equations,*
P.J. van der Houwen, Report TW 132/72, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1972).

28 *Explicit Runge-Kutta formulas with increased stability boundaries,*
P.J. van der Houwen, Numer. Math. 20 (1972) 149-164.

29 *A note on two-step integration formulas of third order accuracy with prescribed stability function,*
P.J. van der Houwen, Report NR 26/72, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1972).

30 *Eenstapsmethoden,*
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium Stijve Differentiaalvergelijkingen,* T.J. Dekker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen (eds.), MC Syllabus 15.1, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1972) 34-87.

1973 31 *Exponential fitted Runge-Kutta formulas of fourth order,*
P.J. van der Houwen, H. Fiolet, Report NW 1/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1973).

32 *One-step methods with adaptive stability functions for the integration of differential equations,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical treatment of functional equations, with emphasis on approximation theory,* Lecture Notes in Math. 333 (1973) 164-174.

1974 33 *Numerieke integratie van differentiaalvergelijkingen, Deel 1: Eenstapsmethoden,*
P.J. van der Houwen, MC Syllabus 24.1, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1974).

34 *Generalized linear multistep methods, Part 1: Development of algorithms with zero-parasitic roots,*
P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Report NW 10/74, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1974).

1975 35 *Two-level difference schemes with varying mesh sizes for the shallow water equations,*
P.J. van der Houwen, Report NW 22/75, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1975).

36 *Stabilized Runge-Kutta methods for second-order differential equations without first derivatives,*
P.J. van der Houwen, Report NW 26/75, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1975).

1976 37 *ALGOL 60 procedures voor begin- en randwaardeproblemen,*
T.M.T. Coolen, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, E. Slagt, MC Syllabus 20, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1976).

38 *Colloquium Discretiseringsmethoden,*
M. Bakker, P.W. Hemker, P.J. van der Houwen, S.J. Polak, M. van Veldhuizen, MC Syllabus 27, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1976).

39 *Begin-randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen,*
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium Numerieke programmatuur*, J.C.P. Bus (ed.), MC Syllabus 29.1a, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1976) 81-99.

40 *Elliptische randwaardeproblemen voor partiële differentiaalvergelijkingen,*
M. Bakker, P.J. van der Houwen, in: *Colloquium Numerieke programmatuur*, J.C.P. Bus (ed.), MC Syllabus 29.1a, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1976) 143-159.

41 *De numericus en de computer,*
Rede uitgesproken bij de aanvaarding van het ambt van bijzonder hoogleraar in de numerieke wiskunde en informatica aan de Universiteit van Amsterdam vanwege de Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde, 25 oktober 1976,
P.J. van der Houwen, Oratie UvA, Amsterdam; Van Gorcum, Assen (1976).

1977 42 *Linear multistep methods for a class of hyperbolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, Report NW 36/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

43 *Runge-Kutta type methods for the integration of hyperbolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, Report NW 40/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

44 *On the numerical solution of Volterra integral equations of the second kind, Part 1: Stability,*
P.J. van der Houwen, Report NW 42/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

45 *Comparing stabilized Runge-Kutta methods for semi-discretized parabolic and hyperbolic equations,*
K. Dekker, P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, P.H.M. Wolkenfelt, Report NW 45/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

46 *A general formulation of linear splitting methods for ordinary and partial differential equations,*
P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Report NW 47/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

47 *Backward differentiation formulas for Volterra integral equations of the second kind, Part 1: Convergence and stability,*
P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele, Report NW 48/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

48 *Gestabiliseerde Runge-Kutta methoden voor de tijdsintegratie van hyperbolische differentiaalvergelijkingen,*
P.J. van de Houwen, in: *Colloquium Numerieke programmatuur, Deel 2*, H.J.J. te Riele (ed.), MC Syllabus 29.2, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977) 73-85.

49 *Volterra-integraalvergelijkingen van de tweede soort,*
P.J. van de Houwen, in: *Colloquium Numerieke programmatuur, Deel 2,* H.J.J. te Riele (ed.), MC Syllabus 29.2, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977) 123-144.

50 *Berekening van waterstanden in zeeën en rivieren,*
P.J. van der Houwen, MC Syllabus 33, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

51 *A comparison of Nyström-Runge-Kutta and linear multistep methods for second order differential equations with slowly and rapidly oscillating solutions,*
P.J. van der Houwen, NN 11/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

52 *Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems,*
P.J. van der Houwen, North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 19, North-Holland (1977).

53 *Non-linear splitting methods for semi-discretized parabolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Report NW 51/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

54 *Numerical experiments with Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, J.N. Schilder, Report NN 12/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1977).

1978 55 *A semi-discretization algorithm for two-dimensional partial differential equations,*
J. Kok, P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt, Report NW 54/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1978).

56 *Backward differentiation formulas for Volterra integral equations of the second kind, Part 2: Numerical experiments,*
H.J.J. te Riele, P.J. van der Houwen, Report NW 57/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1978).

57 *On the numerical solution of Volterra integral equations of the second kind, Part 2: Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, J.G. Blom, Report NW 61/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1978).

58 *On the stability of multistep formulas for systems of Volterra integro-differential equations,*
P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele, P.H.M. Wolkenfelt, Report NW 63/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1978).

1979 59 *Stabilized Runge-Kutta methods for second order differential equations without first derivatives,*
P.J. van der Houwen, SIAM J. Numer. Anal. 16 (1979) 523-537.

60 *One-step splitting methods formulated for semi-discrete parabolic equations,*
P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Computing 22 (1979) 291-309.

61 *Comparing time integrators for parabolic equations in two space dimensions with a mixed derivative,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J.G. Verwer, J. Comput. Appl. Math. 5 (1979) 73-83.

62 *Comparison of algorithms for systems of ordinary differential equations originating from parabolic initial-boundary value problems,*
P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, in: *Proc. IFIP TC 2.5 working conference on performance evaluation of numerical software,* L.D. Fosdick (ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam (1979) 185-198.

63 *On the stability of direct quadrature rules for second kind Volterra integral equations,*
P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt, Report NN 18/79, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1979).

1980 64 *Multistep splitting methods of high order for initial value problems,*
P.J. van der Houwen, SIAM J. Numer. Anal. 17 (1980) 410-427.

65 *On the stability of multistep formulas for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt, Computing 24 (1980) 341-347.

66 *On the internal stability of explicit, m-stage Runge-Kutta methods for large m-values,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Z. angew. Math. Mech. 60 (1980) 479-485.

67 *Convergence and stability analysis of Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, Report NW 83/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1980).

68 *Convergence and stability results in Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, BIT 20 (1980) 375-377.

69 *Multistep splitting methods for nonlinear initial value problems,*
P.J. van der Houwen, in: *Colloquium Numerical solution of partial differential equations*, J.G. Verwer (ed.), MC Syllabus 44, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1980) 98-108.

1981 70 *Modified Nyström methods for semi-discrete hyperbolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, SIAM J. Numer. Anal. 18 (1981) 1081-1097.

71 *Convergence and stability analysis for modified Runge-Kutta methods in the numerical treatment of second-kind Volterra integral equations,*
P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt, C.T.H. Baker, IMA J. Numer. Anal. 1 (1981) 303-328.

72 *Backward differentiation type formulas for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele, Numer. Math. 37 (1981) 205-217.

73 *Analysis of numerical methods for second kind Volterra equations by imbedding techniques,*
P.H.M. Wolkenfelt, P.J. van der Houwen, Chr.T.H. Baker, J. Integral Equations 3 (1981) 61-82.

74 *On the treatment of time-dependent boundary conditions in splitting methods for parabolic differential equations,*
B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Int. J. Numer. Meth. Engng. 17 (1981) 335-346.

75 *On the economization of stabilized Runge-Kutta methods with applications to parabolic initial value problems,*
B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, Z. angew. Math. Mech. 61 (1981) 105-114.

76 *A-stable Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical methods in stiff initial value problems*, G. Dahlquist, R. Jeltsch (eds.), Bericht No. 9, TH Aachen (1981) 122-126.

77 *Defect correction iteration and splitting methods for time-dependent partial differential equations,*
P.J. van der Houwen, Report NW 116/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1981).

1982 78 *On the time integration of parabolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical Analysis*, Proc. of the 9th Biennial Conference, G.A. Watson (ed.), Dundee, 1981, Lecture Notes in Mathematics 912, Springer, Berlin (1982) 157-168.

79 *Preconditioning and coarse grid corrections in the solution of the initial value problem for nonlinear partial differential equations,*
P.J. van der Houwen, H.B. de Vries, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 3 (1982) 473-485.

80 *A special class of multistep Runge-Kutta methods with extended real stability interval,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, IMA J. Numer. Anal. 2 (1982) 183-209.

81 *Linear multistep methods for Volterra integral equations of the second kind,*
P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele, in: *Treatment of integral equations by numerical methods*, C.T.H. Baker, G.F. Miller (eds.), Academic Press, London (1982), 79-94.

82 *Algebraically equivalent linear multistep solutions of Volterra integral equations and certain systems of ODEs*,
P.J. van der Houwen, Report NW 144/82, Mathematisch Centrum, Amsterdam (1982).

1983 83 *A fourth order ADI method for semidiscrete parabolic equations*,
P.J. van der Houwen, H.B. de Vries, J. Comput. Appl. Math. 9 (1983) 41-63.

84 *Stability analysis of numerical methods for Volterra integral equations with polynomial convolution kernels*,
S. Amini, C.T.H. Baker, P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt, J. Integral Equations 5 (1983) 73-92.

85 *Analysis of Chebyshev relaxation in multigrid methods for nonlinear parabolic differential equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Z. angew. Math. Mech. 63 (1983) 193-201.

86 *Improved absolute stability of predictor-corrector methods for retarded differential equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: *Differential-Difference Equations*, L. Collatz, G. Meinardus, W. Wetterling (eds.), Int. Series of Numer. Math. 62, Birkhäuser Verlag, Basel (1983) 137-148.

87 *Predictor-corrector methods with improved absolute stability regions*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, IMA J. Numer. Anal. 3 (1983) 417-437.

1984 88 *Iterated splitting methods of high order for time-dependent partial differential equations*,
P.J van der Houwen, SIAM J. Numer. Anal. 21 (1984) 635-656.

89 *Generalized predictor-corrector methods with large intervals of stability*,
P.J. van der Houwen, in: *Proc. of the second Seminar on Numerische Behandlung von Differentialgleichungen*, K. Strehmel (ed.), Martin-Luther-Universität, Halle (1984) 48-51.

90 *Software with low storage requirements for two-dimensional, nonlinear, parabolic differential equations, Algorithm 621*,
B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, ACM Trans. on Math. Software 10 (1984) 378-396.

91 *Stability in linear multistep methods for pure delay equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 10 (1984) 55-63.

92 *Linear multistep methods with reduced truncation error for periodic initial-value problems*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, IMA J. Numer. Anal. 4 (1984) 479-489.

1985 93 *Runge-Kutta methods for systems of ODEs with imaginary eigenvalues*,
P.J. van der Houwen, in: *Proc. of the fourth conference on the numerical treatment of ordinary differential equations*, R. März (ed.), Berlin, Seminar Bericht nr. 65, Humboldt Universität (1985) 83-88.

94 *Stability results for discrete Volterra equations: Numerical experiments*,
P.J. van der Houwen, J.G. Blom, in: *Constructive methods for the practical treatment of integral equations*, G. Hämmerlin, K.-H. Hoffmann (eds.), Int. Series of Numer. Math. 73, Birkhäuser Verlag, Basel (1985) 166-178.

95 *Linear multistep methods for Volterra integral and integro-differential equations*,
P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele, Math. Comp. 45 (1985) 439-461 (Supplement on pages S21-S28).

96 *High order difference schemes with reduced dispersion for hyperbolic differential equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 12 & 13 (1985) 145-161.

97 *Stability results for discrete Volterra equations*,
P.J. van der Houwen, in: *Mathematical Analysis*, J.M. Rassias (ed.), Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 79, Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig (1985) 114-139.

98 *Numerical integration of retarded differential equations with periodic solutions,*
H. Arndt, P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: *Delay Equations, Approximation and Application*, G. Meinardus, G. Nürnberger (eds.), Int. Series of Numer. Math. 74, Birkhäuser Verlag, Basel (1985) 41-51.

1986 99 *The Numerical Solution of Volterra Equations,*
H. Brunner, P.J. van der Houwen, CWI Monograph, Vol. 3, North-Holland, Amsterdam (1986).

100 *Numerical analysis of the shallow water equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J.G. Verwer, F.W. Wubs, in: *Mathematics and Computer Science*, Proceedings of the CWI symposium, November 1983, CWI Monograph, Vol. 1, J.W. de Bakker, M. Hazewinkel, J.K. Lenstra (eds.), North-Holland, Amsterdam (1986) 235-268.

101 *Spatial discretization of hyperbolic equations with periodic solutions,*
P.J. van der Houwen, Int. J. Numer. Methods Engng. 23 (1986) 1395-1406.

102 *Discretization of hyperbolic differential equations with periodic solutions,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical treatment of differential equations*, Proc. of the third NUMDIFF conference, Halle, 1985, Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 82 (1986) 75-79.

103 *Generalized predictor-corrector methods of high order for the time integration of parabolic differential equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, H.B. de Vries, Z. angew. Math. Mech. 66 (1986) 595-605.

104 *On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Christopher T.H. Baker, IMA J. Numer. Anal. 6 (1986) 1-23.

105 *Symmetric linear multistep methods for second-order differential equations with periodic solutions,*
B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, B. Neta, Appl. Numer. Math. 2 (1986) 69-77.

106 *Reduction of dispersion in hyperbolic difference schemes by adapting the space discretization,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 16 (1986) 203-214.

107 *On the numerical integration of second-order initial value problems with a periodic forcing function,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, K. Strehmel, R. Weiner, Computing 37 (1986) 195-218.

1987 108 *The method of lines and exponential fitting,*
P.J. van der Houwen, F.W. Wubs, Int. J. Numer. Methods Engng. 24 (1987) 557-567.

109 *Explicit Runge-Kutta (-Nyström) methods with reduced phase errors for computing oscillating solutions,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, SIAM J. Numer. Anal. 24 (1987) 595-617.

110 *Predictor-corrector methods for periodic second-order initial-value problems,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, IMA J. Numer. Anal. 7 (1987) 407-422.

111 *A numerical study of a 1D stationary semiconductor model,*
B.P. Sommeijer, W.H. Hundsdorfer, C.T.H. Everaars, P.J. van der Houwen, J.G. Verwer, Report NM-N8702, CWI, Amsterdam (1987).

1988 112 *Smoothed predictor-corrector methods for solving partial differential equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: Proc. of the intern. conf. on Numerical Mathematics, Singapore, 1988, Int. Series of Numer. Math. 86, Birkhäuser Verlag, Basel (1988) 201-224.

113 *Integraalrekening en differentiaalvergelijkingen,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, P.M. de Zeeuw, Cursusboek Wiskunde 2 van de Open Universiteit; Deel 3: *Numerieke Wiskunde,* Open Universiteit, Heerlen (1988).

114 *Analysis of smoothing matrices for the preconditioning of elliptic difference equations,*
P.J. van der Houwen, C. Boon, F.W. Wubs, Z. angew. Math. Mech. 68 (1988) 3-10.

115 *Stabilization of explicit difference schemes by smoothing techniques,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical treatment of differential equations,* Proc. of the fourth NUMDIFF conference, Halle, 1987, K. Strehmel (ed.), Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 104, Teubner Verlaggesellschaft, Leipzig (1988) 205-215.

1989 116 *Phase-lag analysis of implicit Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, SIAM J. Numer. Anal. 26 (1989) 214-229.

117 *Diagonally implicit Runge-Kutta-Nyström methods for oscillatory problems,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, SIAM J. Numer. Anal. 26 (1989) 414-429.

118 *Analysis of smoothing operators in the solution of partial differential equations by explicit difference schemes,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, F.W. Wubs, Appl. Numer. Math. 6 (1989) 501-521.

119 *A comparative study of Chebyshev acceleration and residue smoothing in the solution of nonlinear elliptic difference equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, G. Pontrelli, in: *Numerical Methods for Ordinary Differential Equations,* A. Bellen, C.W. Gear, E. Russo (eds.), Lecture Notes in Mathematics 1386, Springer Verlag, Berlin (1989) 69-96.

120 *The use of smoothing techniques in the method of lines,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: *IMACS Annals on Computing and Applied Mathematics,* R. Vichnevetsky (ed.), Vol. 1, *Numerical and Applied Mathematics,* W.F. Ames, C. Brezinski (eds.), Baltzer, Basel (1989) 549-554.

121 *Note on explicit parallel multistep Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, P.A. van Mourik, J. Comput. Appl. Math. 27 (1989) 411-420.

1990 122 *Improving the stability of predictor-corrector methods by residue smoothing,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, IMA J. Numer. Anal. 9 (1990) 361-378.

123 *Iterated θ-method for hyperbolic equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Int. J. Numer. Meth. Engng. 30 (1990) 271-290.

124 *Parallel iteration of high-order Runge-Kutta methods with stepsize control,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 29 (1990) 111-127.

125 *Parallel ODE solvers,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Proc. of the Int. Conf. on Supercomputing, June 11-15, 1990, Amsterdam, ACM Press (1990) 71-81.

126 *Block Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, in: *Numerical treatment of differential equations,* Proc. of the fifth NUMDIFF conference, Halle, May 22-26, 1989, K. Strehmel (ed.), Teubner-Texte zur Mathematik, Vol. 121 (1990) 225-232.

1991 127 *Numerical analysis of time-dependent Boussinesq models,*
P.J. van der Houwen, J. Mooiman, F.W. Wubs, Int. J. Numer. Methods Fluids 13 (1991) 1235-1250.

128 *Iterated Runge-Kutta methods on parallel computers,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, SIAM J. Sci. Stat. Comput. 12 (1991) 1000-1028.

129 *Stability of collocation-based Runge-Kutta-Nyström methods,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Nguyen huu Cong, BIT 31 (1991) 469-481.

130 *Smoothed Runge-Kutta methods in the method of lines*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, K. Strehmel, Report NM-R9101, CWI, Amsterdam (1991).

1992 131 *Block Runge-Kutta methods on parallel computers*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Z. angew. Math. Mech. 72 (1992) 3-18.

132 *Embedded diagonally implicit Runge-Kutta algorithms on parallel computers*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, W. Couzy, Math. Comp. 58 (1992) 135-159.

133 *A-stable parallel block methods for ordinary and integro-differential equations*,
B.P. Sommeijer, W. Couzy, P.J. van der Houwen, Appl. Numer. Math. 9 (1992) 267-281.

134 *Parallel diagonally implicit Runge-Kutta-Nyström methods*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Nguyen huu Cong, Appl. Numer. Math. 9 (1992) 111-131.

135 *Fractional Runge-Kutta methods with application to convection-diffusion equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Impact of Comput. in Science and Engng. 4 (1992) 195-216.

1993 136 *Preconditioning in implicit initial value problem methods on parallel computers*,
P.J. van der Houwen, Adv. in Comput. Math. 1 (1993) 39-60.

137 *Parallel step-by-step methods*,
P.J. van der Houwen, Appl. Numer. Math. 11 (1993) 69-81.

138 *Stability of parallel Volterra-Runge-Kutta methods*,
M.R. Crisci, P.J. van der Houwen, E. Russo, A. Vecchio, J. Comput. Appl. Math. 45 (1993) 168-180.

139 *Analysis of parallel diagonally implicit iteration of Runge-Kutta methods*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Appl. Numer. Math. 11 (1993) 169-188.

140 *Parallel Jacobi iteration in implicit step-by-step methods*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: *Contributions in Numerical Mathematics*, R.P. Agarwal (ed.), World Scientific Series in Applicable Analysis, Vol. 2, World Scientific Publishing Company, Singapore (1993) 225-238.

141 *Parallel block predictor-corrector methods of Runge-Kutta type*,
P.J. van der Houwen, Nguyen huu Cong, Appl. Numer. Math. 13 (1993) 109-123.

142 *Selected papers of the sixth NUMDIFF conference on the numerical treatment of differential equations*, Halle, Germany, September, 1992,
K. Strehmel, P.J. van der Houwen, R. Weiner (eds.), Appl. Numer. Math. 13 (1993) 1-270.

143 *Numerical methods for ordinary differential equations*,
Proc. of the 13th IMACS World Congress on Computational and Applied Mathematics, Dublin, July 22-26, 1991, J.C. Butcher, J.R. Cash, P.J. van der Houwen (eds.), J. Comput. Appl. Math. 45 (1993) 1-236.

144 *Parallel iteration schemes for implicit ODEIVP methods*,
P.J. van der Houwen, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. LXIII (1993) 151-170.

1994 145 *Butcher-Kuntzmann methods for nonstiff problems on parallel computers*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Appl. Numer. Math. 15 (1994) 357-374.

146 *Preconditioning in parallel Runge-Kutta methods for stiff initial value problems*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Computers Math. Applic. 28 (1994) 17-31.

147 *Time integration of three-dimensional numerical transport models*,
B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, J. Kok, Appl. Numer. Math. 16 (1994) 201-225.

148 *Parallelism across the steps in iterated Runge-Kutta methods for stiff initial value problems,* P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, W.A. van der Veen, Numer. Algorithms 8 (1994) 293-312.

149 *Scientific Computation and Differential Equations,*
Proceedings of the international conference on scientific computation and differential equations, Auckland, New Zealand, January 4-8, 1993, C.T.H. Baker, K. Burrage, P.J. van der Houwen, Z. Jackiewicz, P.W. Sharp (eds.), Annals of Numerical Mathematics, Vol. 1 (1994).

150 *On the history of Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, in: *From Universal Morphisms to Megabytes: A Baayen Space Odyssey,* K. Apt, L. Schrijver, N. Temme (eds.), CWI Amsterdam (1994), 363-376.

1995 151 *Convergence aspects of step-parallel iteration of Runge-Kutta methods,*
W.A. van der Veen, J.J.B. de Swart, P.J. van der Houwen, Appl. Numer. Math. 18 (1995) 397-411.

152 *Parallel iteration across the steps of high-order Runge-Kutta methods for nonstiff initial value problems,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, W.A. van der Veen, J. Comput. Appl. Math. 60 (1995) 309-329.

153 *On solving implicit differential equations on parallel computers,*
P.J. van der Houwen, W.A. van der Veen, Rendiconti del Seminario Matematico e Fisico di Milano, Vol. LXV (1995) 159-178.

154 *Selected papers of the seventh NUMDIFF conference on the numerical treatment of differential equations,* Halle, Germany, September 19-23, 1994,
P.J. van der Houwen, K. Strehmel, R. Weiner (eds.), Appl. Numer. Math. 18 (1995) 1-430.

1996 155 *The development of Runge-Kutta methods for partial differential equations,*
P.J. van der Houwen, Appl. Numer. Math. 20 (1996) 261-272.

156 *Parallel predictor-corrector methods,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J.J.B. de Swart, J. Comput. Appl. Math. 66 (1996) 53-71.

157 *Iteration of Runge-Kutta methods with block triangular Jacobians,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Z. angew. Math. Mech. 76 (1996) 367-375.

158 *CWI contributions to the development of parallel Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, in: *Special issue celebrating the centenary of Runge-Kutta methods,* J.C. Butcher (ed.), Appl. Numer. Math. 22 (1996) 327-344.

1997 159 *Parallel linear system solvers for Runge-Kutta methods,*
P.J. van der Houwen, J.J.B. de Swart, Adv. Comput. Math. 7 (1997) 157-181.

160 *Parallel linear system solvers for Runge-Kutta-Nyström methods,*
P.J. van der Houwen, E. Messina, J. Comput. Appl. Math. 82 (1997) 407-422.

161 *Triangularly implicit iteration methods for ODE-IVP solvers,*
P.J. van der Houwen, J.J.B. de Swart, SIAM J. Sci. Comput. 18 (1997) 41-55.

162 *Waveform relaxation methods for implicit differential equations,*
P.J. van der Houwen, W.A. van der Veen, Adv. Comput. Math. 7 (1997) 183-197.

163 *Splitting methods for three-dimensional transport models with interaction terms,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Sci. Comput. 12 (1997) 215-231.

164 *Euler-Chebyshev methods for integro-differential equations,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Appl. Numer. Math. 24 (1997) 203-218.

165 *The iterative solution of fully implicit discretizations of three-dimensional transport models,*
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Kok, Appl. Numer. Math. 25 (1997) 243-256.

166 *The solution of implicit differential equations on parallel computers*,
P.J. van der Houwen, W.A. van der Veen, Appl. Numer. Math. 25 (1997) 257-274.

167 *Parallel linear system solvers for Runge-Kutta methods*,
P.J. van der Houwen, J.J.B. de Swart, in: *Proc. of the 15th IMACS World Congress*, A. Sydow (ed.), Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, Vol. 2 (1997) 63-68.

168 *Parallel methods for solving Runge-Kutta discretizations of Volterra integro-differential equations*,
P.J. van der Houwen, in: *Proc. of the 15th IMACS World Congress*, A. Sydow (ed.), Wissenschaft und Technik Verlag, Berlin, Vol. 2 (1997) 427-432.

1998 169 *Analysis of approximate factorization in iteration methods*,
C. Eichler-Liebenow, P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Appl. Numer. Math. 28 (1998) 245-258.

170 *The use of approximate factorization in stiff ODE solvers*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 100 (1998) 11-21.

171 *Splitting methods for second-order initial value problems*,
P.J. van der Houwen, E. Messina, Numer. Algorithms 18 (1998) 233-257.

172 *Parallel methods for nonstiff VIDEs*,
P.J. van der Houwen, J. Integral Equations Appl. 10 (1998) 503-515.

173 *New generation shelf flux models*,
G. Stelling, D. Roose, B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, J. Kok, H.X. Lin, K. Tan, Report MAS-R9815, CWI, Amsterdam (1998).

174 *Approximate factorization in shallow water applications*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Report MAS-R9835, CWI, Amsterdam (1998).

175 *Selected papers of the eighth NUMDIFF conference on the numerical treatment of differential equations*, Alexisbad, Germany, September 1-5, 1997,
P.J. van der Houwen, K. Strehmel, R. Weiner (eds.), Appl. Numer. Math. 28 (1998) 91-491.

176 *Parallel aspects of integration methods for initial value problems*,
P.J. van der Houwen, in: *Special Functions and Differential Equations*, K. Srinivasa Rao et al. (eds.), Proc. of a workshop held at IMS, Madras, India, January 13-24, 1997, Allied Publishers (1998) 403-431.

1999 177 *Parallel Adams methods*,
P.J. van der Houwen, E. Messina, J. Comput. Appl. Math. 101 (1999) 153-165.

178 *Parallel Störmer-Cowell methods for high-precision orbit computations*,
P.J. van der Houwen, E. Messina, J.J.B. de Swart, Appl. Numer. Math. 31 (1999) 353-374.

179 *Splitting methods for partial Volterra integro-differential equations*,
H. Brunner, P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Report MAS-R9909, CWI, Amsterdam (1999).

2000 180 *Oscillatory Störmer-Cowell methods*,
P.J. van der Houwen, E. Messina, B.P. Sommeijer, J. Comput. Appl. Math. 115 (2000) 547-564.

181 *Note on the time integration of 3D advection-reaction equations*,
P.J. van der Houwen, J. Comput. Appl. Math. 116 (2000) 275-278.

182 *Diagonally implicit Runge-Kutta methods for 3D shallow water applications*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Adv. Comput. Math. 12 (2000) 229-250.

183 *Factorization in block-triangularly implicit methods for shallow water applications*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Report MAS-R9906, CWI, Amsterdam, to appear in Appl. Numer. Math. (2000).

184 *Approximate factorization for time-dependent partial differential equations*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Report MAS-R9915, CWI, Amsterdam, to appear in J. Comput. Appl. Math. (2000).

185 *Parallel solution of a coupled flow and transport model for shallow water*,
P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, Report MAS-R0008, CWI, Amsterdam (2000).

186 *Parallel iteration of the extended backward differentiation formulas*,
J.E. Frank, P.J. van der Houwen, to appear in IMA J. Numer. Anal. (2000).

187 *Diagonalizable extended backward differentiation formulas*,
J.E. Frank, P.J. van der Houwen, BIT 40 (2000) 497-512.

Deel I

Persoonlijke wensen, herinneringen, reisverslagen, e.d.

To Pieter van der Houwen

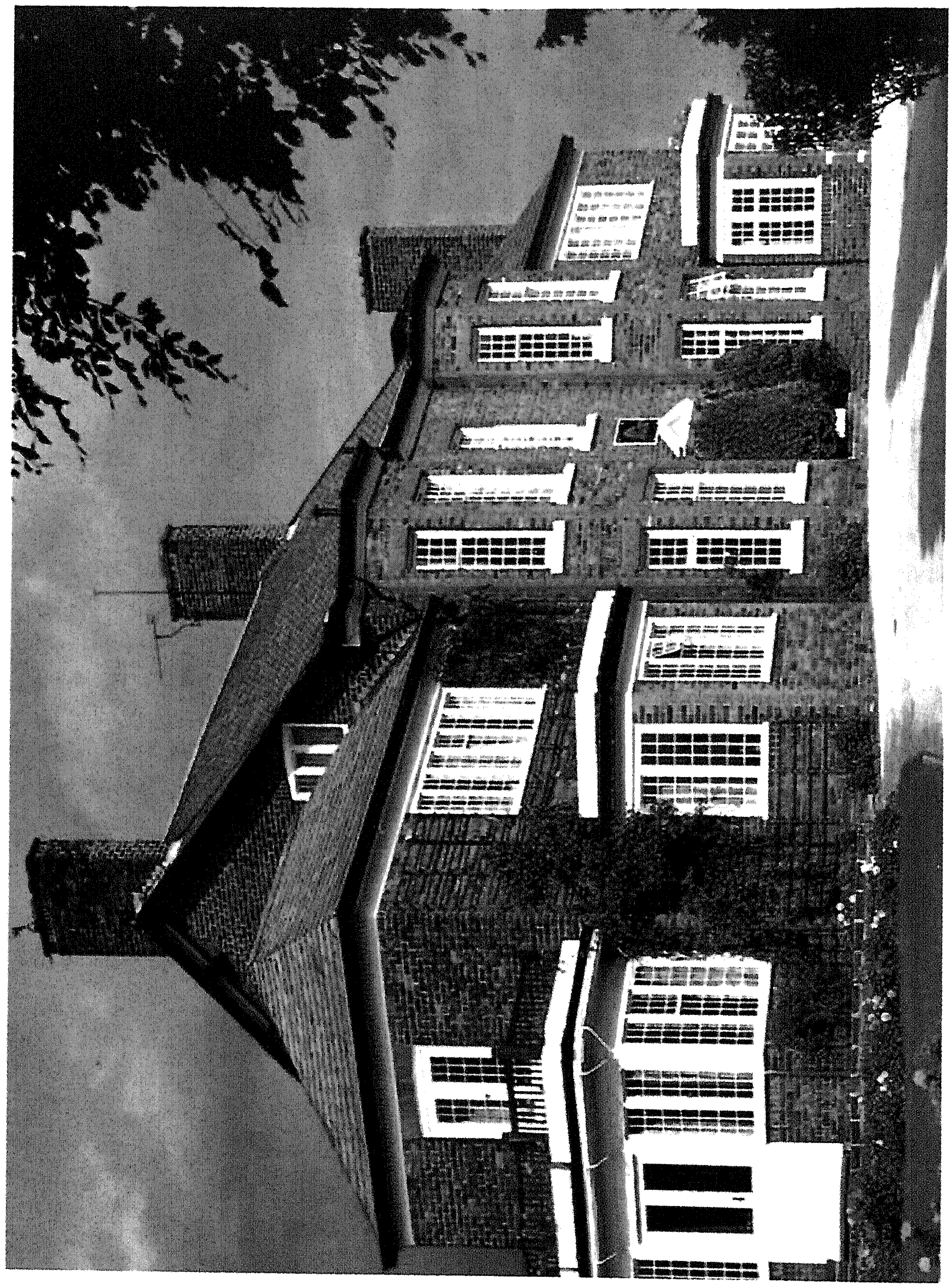
The collaborative link that initiated us as co-researchers and that brought us and our families together as good friends started many decades ago. It has continued through research fellowships, joint visits, hospitality in each of our homes, attendance at conferences, shared driving on the autobahn, wine-tasting and sampling of many a national cuisine. The passage of years is reflected in the fact that Pieter & Aly and Christopher & Helen are now grandparents.

There are many pictures (from many parts of the globe) that one could use to recall the history of our `adventures'; together. I have chosen one of the hotel close to where we live that we use for special occasions like family wedding receptions – The Stanneylands Hotel, in Wilmslow. This was converted from a family home, and (while the basic building is Georgian) the site is mentioned in a property deed of about 1200 AD.

- It is here that Pieter once stayed (with Paul Wolkenfelt) on a research visit when we thrashed out the mathematical detail of a paper. The upper left-hand room was the one occupied by Pieter.
- It was here, too, that we had a splendid dinner "en famille" (and Fleur was a little unhappy at being carried on my shoulders, after the meal !!) .

Though I could have chosen pictures from several continents that we have visited together, this one will, perhaps recall the atmosphere of English life as it was, still is and, for a while to come, will be.

Christopher Baker



SPANJE + WIJN > SPAANSE WIJN

Zomer 1965 maakten Aly, Piet, Hanneke en ondergetekende een uitgebreide tocht door Spanje. Dat was nog een tijd dat dit prachtige land een zekere onbedorvenheid had. Zo herinner ik mij levendig een avond in Peñiscola. Na een actieve dag besloten we tot een beperkte kroegentocht door dit allercharmantste witte vissersdorp. Toen we bij de auto kwamen om naar de tenten terug te gaan, ontdekten we dat we het tasje - met precieze Piet als schatbewaarder - kwijt waren, waarin paspoorten, rijbewijzen, het grote geld e.d. zaten. We kwamen tot de conclusie dat we het in één van de café's hadden laten liggen en met weinig optimisme besloten we om de tocht in reversie over te doen. Toen we bij het eerste café van de avond - dus het laatste van onze tegendraadse actie - kwamen, hadden onze verwachtingen zo langzamerhand het nulpunt bereikt. Maar de wonderen waren de wereld nog niet uit. We waren nog niet binnen of iemand kwam, zwaaiend met ons tasje, op ons af. De eerlijke vinders waren Biscaayse vissers. Tot behoorlijk diep in de nacht hebben we met ze aan de bar gezeten, hetgeen zelfs uitmondde in gezamenlijk gezang. Waar vindt men nog zoiets?
Recente ervaringen maken ons niet optimistisch over de kans iets dergelijks nog in Spanje te vinden. Al was het maar omdat we inmiddels behept zijn met een (gezonde?) dosis wantrouwen, zodat we ons hebben en houwen minder gauw zullen vergeten. We zullen wel zien als we met z'n vieren mettertijd de tocht nog eens over doen.

Het is lang na onze Spaanse avonturen, zelfs vrij lang na mijn vertrek van het MC, dat Piet en ik ons in een gezamenlijke hobby stortten: WIJN.
Zelf had ik me reeds enige tijd eerder op dit onderwerp gericht en ik had zelfs een kelder laten aanleggen, toen Piet zich aansloot bij het leger van - wat buitenstaanders vaak noemen- wijngekken. Die buitenstaanders zullen niet gauw begrijpen wat nu de grote charme is van dit edele vocht.
Zij realiseren zich volstrekt niet dat wijn als hobby verschrikkelijk veel dimensies kent. Allereerst het drinken/proeven dat al een heel complexe zaak is, waarbij op de bottomline slechts één ding telt: vind ik deze wijn lekker? Met uitdrukkelijk het accent op ik; de Romeinen waren het er al over eens, dat smaak heel subjectief is. Een tweede dimensie, die met het klimmen der jaren aan gewicht wint, is het gezondheidselement. Rode wijn heeft allerlei zeer positieve kanten; daar weet Piet alles van. Eigenlijk zou de ziekte-verzekering een halve fles rode wijn per dag moeten vergoeden. Een derde belangrijke dimensie is: speuren en goed inkopen. Hierbij doel ik beslist niet op de kick van het kopen zelf, maar juist op het genoegen van de ontdekkingsreis door het ruime aanbod met als één van de doelen het optimaliseren van de prijs/smaak verhouding. Uiteindelijk blijven we Hollanders. En alle dimensies hebben één ding gemeen, je kunt er eindeloos over praten. Dat laatste doen we overigens maar zeer beperkt. Het accent van onze gezamenlijke wijnacties lag in het begin duidelijk in Frankrijk. Maar geleidelijk werden we internationaler. En nu? Ik ben al geruime tijd van mening dat Spanje het land in Europa is waar je het meeste "wijnwaar" voor je geld krijgt. Hebben we dan toch iets met Spanje?

Gerrit Jan Förch

Een huis in Toscane?

Jaco de Bakker
zomer 2000

Op 1 januari 1973 werd de Rekenafdeling van het (voormalige) Mathematisch Centrum gesplitst in een afdeling Numerieke Wiskunde en een afdeling Informatica. Vanaf dat moment waren Piet van der Houwen en ik collega-afdelingshoofd. Piet van Numerieke Wiskunde en ik van AI. Tot 1 januari 1997 bleef die situatie in essentie gehandhaafd, daarna verkreeg Piet de eervolle status van CWI fellow.

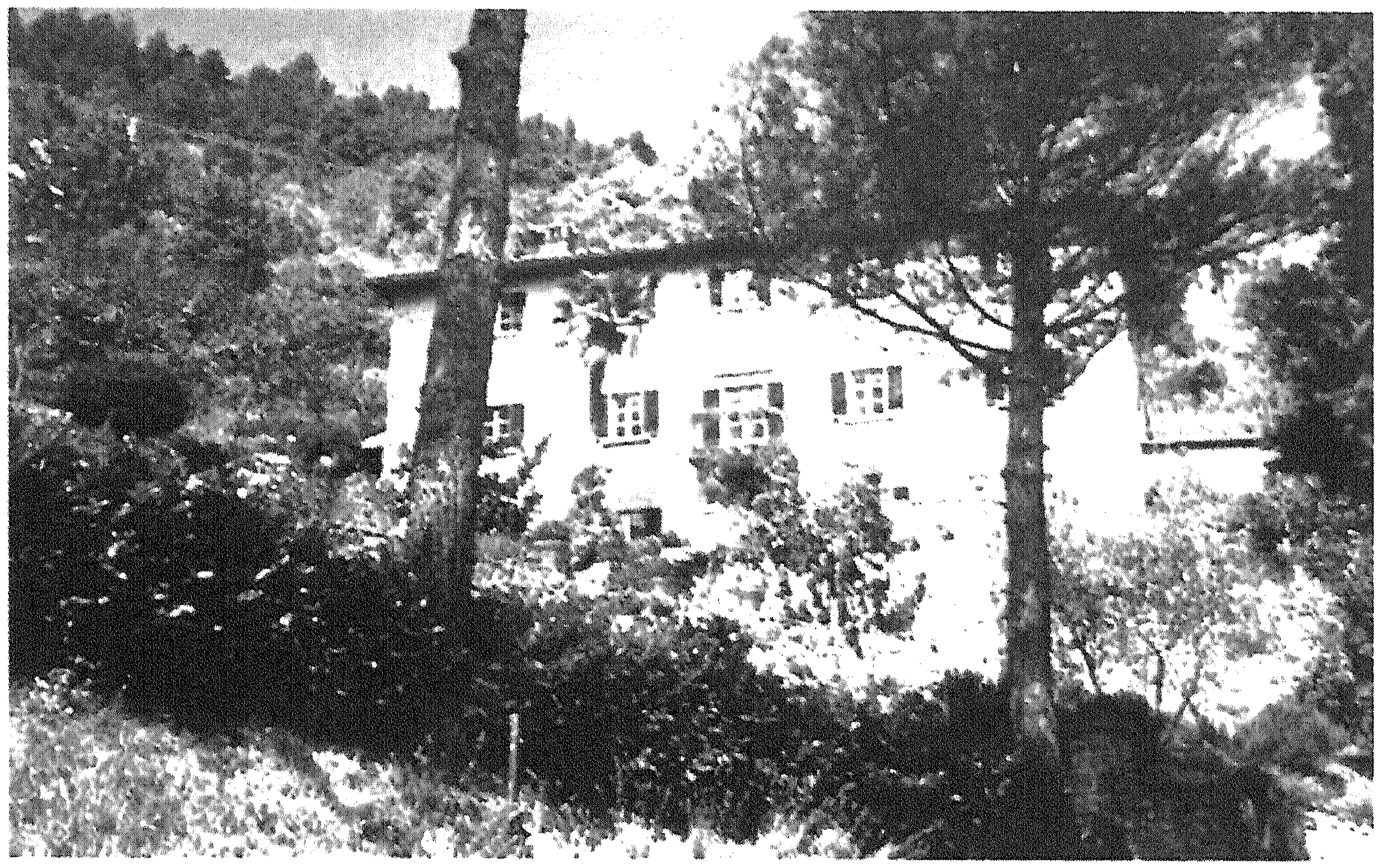
Ons beider rol als afdelingshoofd bracht met zich mee dat we tal van vergaderingen van CWI-organen zoals Raad van Beheer, Beleidsraad, Instituutsraad, WAD (waar stond dat ook alweer voor?), WBG, ... moesten bijwonen. Voor jou was de term "moeten" zeker van toepassing: er waren heel wat zaken waar je je tijd liever aan besteedde. Dit stukje gaat dan ook alleen nog maar over enige van je grote liefdes, namelijk -- naast de numerieke wiskunde, ongetwijfeld door velen in dit Liber behandeld -- Italië en wijnen (en ook een beetje de combinatie hiervan).

Het samenzijn op de eerste van de twee bijgevoegde foto's vond plaats daar waar Toscane en Umbrië elkaar ontmoeten, in het aan het Trasimeense meer gelegen Castiglione del Lago. Een scherp waarnemer zou in de verte mogelijk de heuvels van Montepulciano kunnen onderscheiden, centrum van de edele DOCG wijn Vino Nobile di Montepulciano. Wij hadden het afgebeelde huis toen -- en vaak daarna -- gehuurd, en jullie zouden bij ons op bezoek komen.De afspraak dreigde mis te lopen, maar jullie wisten ons via de verrassend effectieve manoeuvre: wachten bij de centrale supermarkt van het dorp, toch te treffen. In diezelfde COOP kocht ik mijn eerste Brunello, voor mij nieuw maar door een kenner als jij meteen hogelijk geprezen.

Door de jaren heen heb je talloze Brunello's in je indrukwekkende wijnkelder opgeslagen en aan je gasten voorgezet. Een paar maanden geleden trakteerde je ons nog op een -- en nu voluit -- Brunello di Montalcino, tenute Silvio Nardi.

Castiglione del Lago ligt dichtbij het befaamde plaatsje Cortona, geboorteplaats van Luca Signorelli en locatie van een van de mooiste Fra Angelico's van Italië.

Een jaar of 12 geleden was ik uitgenodigd door prof. Monegato uit Turijn om in een Palazzone van de Italiaanse CNR in Cortona een serie lezingen te komen geven. Door een aantal omstandigheden kon ik daar toen niet op in gaan, en ik moet je bekennen dat ik door een licht gevoel van afgunst werd bevangen toen je me enkele jaren geleden vertelde dat jij daar met Aly een maand te gast zou zijn. Ik meen dat dit in 1997 was, en ook toen troffen we elkaar enkele malen in onze favoriete restaurants. Ik herinner me La Tuffa, een schitterend gelegen simpele trattoria in Ossaia, vlak onder Cortona. Ossaia is niet zo'n vrolijke plaats -- naar men zegt is het genoemd naar de beenderen die er nog zouden resten van de gesneuvelden in de slag van Hannibal bij het Trasimeense meer.



Tijdens dit soort etentjes hebben we beiden vaak gesproken over hoe het zou zijn een huis in Toscane te bezitten. Of het er ooit van zal komen...?
Om vast aan het idee te wennen hierbij, op de tweede foto, een afbeelding van een van de inmiddels bekendste huizen in Toscane: het door Frances Mayes beroemd geworden huis genaamd Bramasole (courtesy Angeline Mulder).
Met deze foto's wilde ik iets documenteren van de vele herinneringen die we -- ook buiten het CWI -- delen. Daarbij heb ik nog niet gerefereerd aan de talloze diners die we in de loop der jaren thuis voor elkaar hebben aangericht.

Het leven bevat ook buiten het werk veel aangename en interessante zaken. Angeline en ik wensen Aly en jou nog vele mooie jaren toe om hiervan te genieten.

Pieter van der Houwen and his contacts with the Universiteit Gent (Belgium)

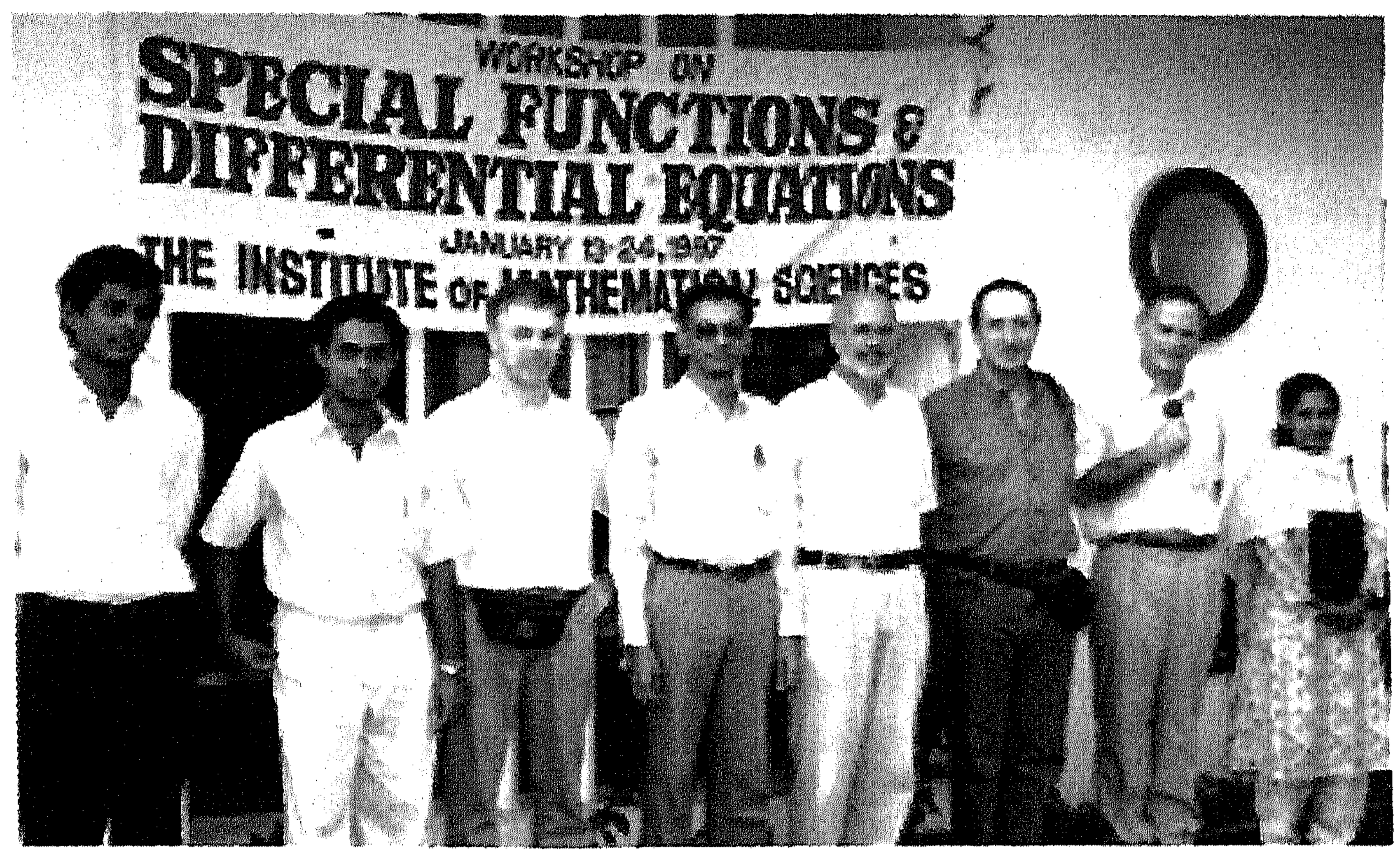
Our research group in Gent was up to the middle of the 80's involved in research related to theoretical physics. Since then we started a group especially interested in the numerical solutions of ordinary dif-ferential equations and Schrödinger equations in particular. Our first contact with Pieter occurs in the lobby of a hotel in Singapore when we both assisted in May 1988 to the International Conference on Numerical Mathematics organised by R. Agarwal. Since then there were regular contacts between Pieter and our group. He was several times in Gent in the framework of the activities of the Scientific Re-search Network of the Fund for Scientific Research (Flanders) called Advanced Numerical Methods for Mathematical Modelling. With his research group he participates as an external member to that net-work. He was also an external examiner of a PhD-thesis in our re-search group. Quit often we met each other at the biennial Confer-ence on Computational and Applied Mathematics at Leuven, in Grado and on the NUMDIFF meetings in Halle (Alexisbad).

As a co-organiser of the workshop on Special Functions and Differ-ential Equations at Chennai (Madras, India) in 1997 I really has ap-preciated the presence of Aly and Pieter at this meeting. Besides Pieter's interest for tropical regions I can believe that he still will re-member these two weeks with a warm feeling. The workshop even made the local newspaper and television due to a special lecture A nuclear-weapon free world: desirable? Possible? Probable? by F. Calogero, secretary general of the Pugwash conferences on science and world affairs, which was attended by His Excellency R. Venkataraman, former President of India. I certainly know that Aly and Pieter will remember the very extensive cultural program prepared by the main organiser Srinivasa Rao.

Among the events were a dance performance (Bharathanatyam by Ms. Malavika Sarukkai), a concert of traditional Indian music (Carnatic music by Ms. Malathi Chandrasekarn (flute)), a trip to a drive-in movie to see a Tamil version of Mrs. Doubtfire and on Sunday a visit to the temple cities Kancheepuram and Mahabalipuram for visiting the temples (barefoot of course) and to do the business with the local sandal makers and sculpturers (bargaining skill is desirable). Aly bought her a very beautiful sari and silk for the wedding of her daughter Ramanujan is of course very closely connected with Chen-nai and a visit to the Ramaujan Museum and the Ramanujan Institute for Mathematical Sciences of the University of Madras was therefore a natural part of the program.
Pieter, we wish you a pleasant retirement and we hope to see you still at several scientific meetings in the Netherlands and abroad.

Guido Vanden Berghe and collaborators of the department of Toegepaste Wiskunde en Informatica of the Universiteit Gent (Belgium)

Pieter, Aly, K. Wright and G. Vanden Berghe (Leuven 1998)



To the right of Pieter, J. Beckers (Liège, Belgium),
G. Vanden Berghe (Gent, Belgium, co-organiser),
K. Srinivasa Rao (Madras, main organiser),
J. Van der Jeugt (Gent, Belgium and co-organiser)

Aly and Mrs. Geetha Srinivasa Rao in Kancheepuram

Beste Piet!

Onze eerste kennismaking valt samen met mijn eerste kennismaking met het MC/CWI: ik kwam langs voor een sollicitatiegesprek. Dat moet ergens in maart 1970 zijn geweest. Samen met Dirk Dekker ontving je mij op de derde verdieping van het oude gebouw van het toenmalige Mathematisch Centrum in de 2e Boerhaavestraat. Ik kan me van het gesprek niet veel herinneren, behalve dat jij mij vertelde dat ik, als ik zou worden aangenomen, bij de "winkel" zou worden ingeschakeld om een opdracht uit te voeren waarbij gebruik gemaakt moest worden van de zgn. Fast Fourier Transform. Ook viel me op hoe minutieus je het sollicitatieformulier met mijn gegevens invulde. Wat later werd ik voor een tweede gesprek uitgenodigd met de toenmalige directeur Van Wijngaarden en met Lauwerier, de toenmalige chef van de afdeling Toegepaste Wiskunde. Bij dat gesprek vertelde ik dat ik wel eens een probleem uit het Nieuw Archief voor Wiskunde probeerde op te lossen (in het midden latend of dat gelukt was), en ik kreeg de indruk dat men dat wel als een positief punt voor mijn aanstelling beschouwde. Per 1 mei werd ik aangesteld bij de Rekendienst, onder Dirk Dekker.

In 1973 werd de afdeling Numerieke Wiskunde ingesteld met jou als chef. Op 1 november van dat jaar werd ik aangesteld als sous-chef van de afdeling, jouw rechterhand zogezegd, en dat duurde tot en met 1987, toen de functie van sous-chef op het MC werd afgeschaft. Onze samenwerking is altijd uitstekend geweest. Dat had verschillende redenen, maar heel belangrijk was dat jij altijd veel zorg en energie besteedde aan een goede sfeer op de afdeling.
Wat daaraan in hoge mate heeft bijgedragen waren de regelmatige diners bij jou thuis, waar Aly steeds weer de meest exquise gerechten aan haar gasten wist voor te toveren, en jij de dis met het serveren van uitgelezen wijnen en het draaien van prachtige klassieke muziek vervolmaakte. Bijgaand een uitnodiging van jou voor een afdelingsdiner bij jou en Aly thuis. De afdeling was zo groot dat dat niet in één keer kon: op twee achtereenvolgende zaterdagen hadden jullie 17 eters te gast!

Aly en jij waren ook regelmatig bij ons thuis te gast en het spreekt vanzelf dat Toke daarbij haar beste beentje voorzette. Het mooiste compliment kon je aan Toke geven als je na het eten onder het genot van een sigaartje en een likeurtje gewoon een beetje zat weg te dommelen terwijl de dames, meestal niet om gespreksstof verlegen, nog gezellig zaten na te kletsen.
Dat was zeker niet onaardig bedoeld van jou tegenover de dames, integendeel: voor Toke was dat het beste bewijs dat haar culinaire inspanningen geslaagd waren!

Je had en hebt ook de gave om je mensen te stimuleren. Een bekende tactiek, vermoedelijk een truc uit de oude MC-cultuur (Van Wijngaarden placht deze ook wel te hanteren), was om in het bijzijn van een medewerker (ondergetekende bv.) tegenover derden over een bepaald probleem te beweren: "daar weet hij alles van". Het was vanzelfsprekend niet handig om tegen dit "bevel" in te gaan, dus voor het geval er lacunes in mijn kennis bestonden met betrekking tot het onderhavige probleem, dan haastte ik me wijselijk om die zo snel mogelijk aan te vullen.

Waar ik je altijd dankbaar voor ben geweest, Piet, is dat je de keuze van mijn onderzoek in de richting van de "numerieke getaltheorie" (ik denk dat jij die term hebt bedacht) steeds voor 100% hebt gesteund, ook al lag die keuze niet in de "main stream" van het gebied van de numerieke wiskunde. Je begreep dat dit onderzoeksgebied veel mensen, en met name de externe beleidsmakers, kon aanspreken en voor publiciteit voor de afdeling èn het MC/CWI kon zorgen.

Goede herinneringen heb ik aan onze samenwerking richting de Adviescommissie Toegepaste en Numeriek Wiskunde. Dit was een externe commissie van hoogleraren numerieke wiskunde die tweemaal per jaar bij elkaar kwamen om advies uit te brengen over de voortgang van het onderzoek en over de nieuwe onderzoeksplannen van de twee afdelingen. Jij had altijd het grootste respect voor deze commissie, en de vergaderingen werden door ons steeds met grote zorg voorbereid: daardoor ben je er bijna altijd in geslaagd, ondanks de soms pittige kritiek, de adviezen van de Adviescommissie in de door jou gewenste richting te krijgen. Ik vraag me af waarom de Adviescommissies toentertijd eigenlijk zijn afgeschaft: ze stimuleren enorm en kunnen een grote steun zijn bij het verkrijgen van erkenning voor het geleverde onderzoek, en van steun voor plannen voor toekomstig onderzoek.

Het leek me leuk, beste Piet, om deze bijdrage aan dit Liber Amicorum, met een foto te verluchtigen. Helaas heb ik niet zo veel foto's waar jij op staat, maar ik heb er toch een gevonden: van de verwelkoming van jou en Aly bij het begin van de viering van jouw 25-jarig jubileum als MC/CWI-er. Dat was op 29 maart 1989.

Ik heb daar nog een kort verslag van gevonden en daarvan voeg ik een deel hierbij, vast wel leuk om nog eens terug te lezen:

Op 1 april 1989 was prof.dr. P.J. van der Houwen 25 jaar in dienst van het Mathematisch Centrum. Om dit feit te vieren werd op 29 maart jl. een Symposium gehouden rond het thema: Constructie van stabiele numerieke methoden voor differentiaal- en integraalvergelijkingen. Als spreker traden op: prof.dr. H. Brunner (Memorial University of Newfoundland, Canada), prof.dr. Th.J. Dekker (UvA), prof.dr. M.N. Spijker (RU Leiden), en dr. J.G. Verwer en drs. B.P. Sommeijer (beiden CWI). Na afloop van het Symposium was er een receptie, waarbij deelnemers, vrienden en collegae de jubilaris hun gelukwensen aanboden. 's Avonds was er een gezellig samenzijn in de kantine van het CWI. Hierbij werd een voortreffelijk koud buffet geserveerd. Daarnaast werd op gepaste wijze aandacht besteed aan twee onderwerpen die de warme belangstelling van de jubilaris genieten: wijn en klassieke muziek.

Je ziet, een aantal sprekers van toen hebben ook vandaag, bij jouw afscheidssymposium, weer acte de présence geleverd.

Ontvangst van Piet en Aly bij Piet's 25-jarig jubileum als MC/CWI-er

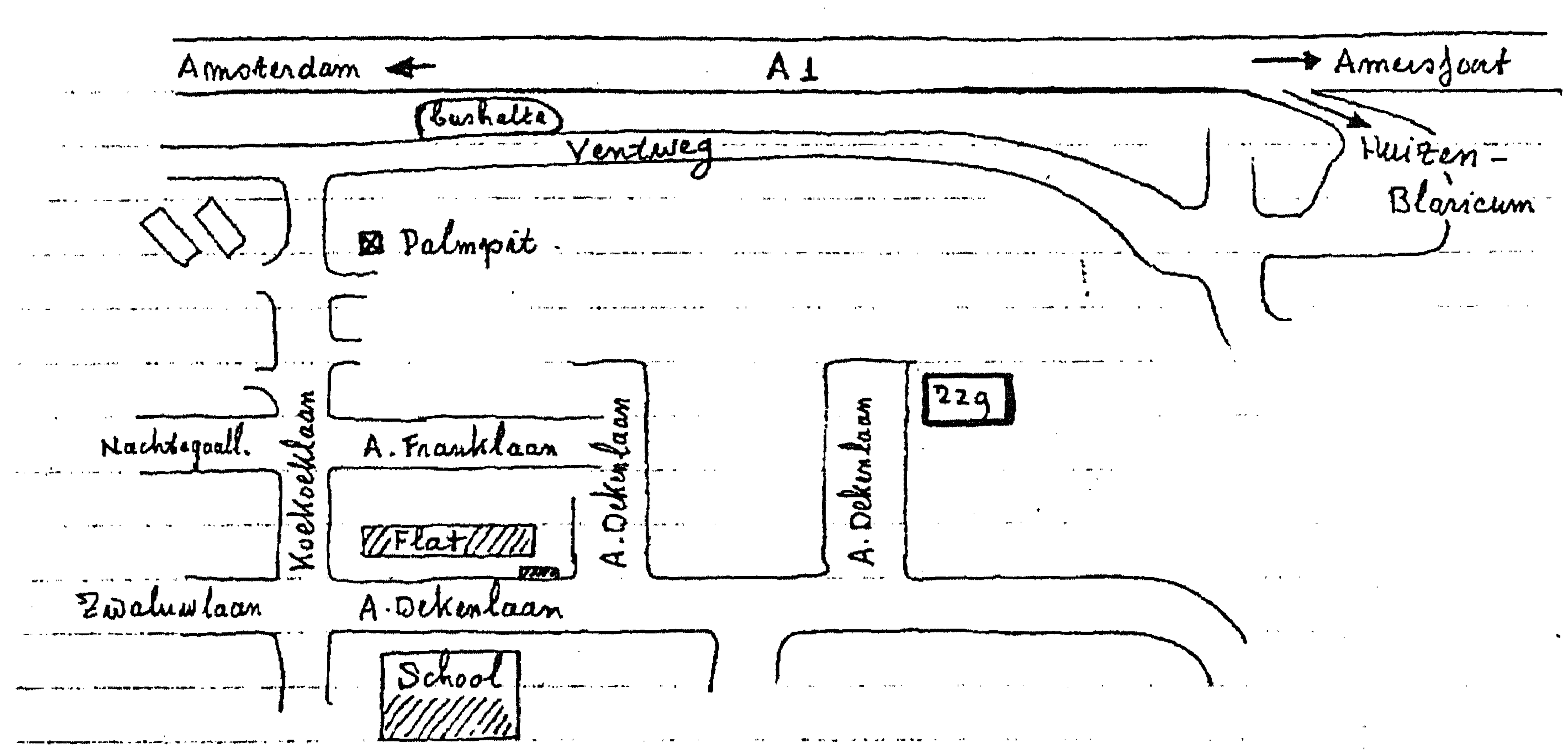
Beste Piet, ik wil je heel hartelijk danken voor een fijne samenwerking en vriendschap in de afgelopen 30 jaren! Ik wens jou, mede namens Toke, nog heel veel goede jaren toe, samen met Aly, je kinderen en kleinkinderen. Je kunt met trots terugzien op een zeer vruchtbare en welbestede tijd op het MC/CWI. Wij zijn je dankbaar voor alles wat je voor het MC/CWI en ons hebt betekend.

Herman te Riele

Afdelingsetentje : 1 en 8 maart 1985, vanaf 18.00

A. Dekenlaan 229, Bussum, tel. 02159-30355

1 maart	8 maart
Akke en Piet	Jan
Herman en Toke	Pamela en Kevin
Barry en Wijnie	Jurgen en Carla
Dik	Taco
Stefan en Jolida	Erik
Ben en Heny	Paul
Tineke en Jan	Margreet en Baas
Freddy en Tineke	Joke en Eric
Aly en Piet	Willem
	Jan
	Kees
	Aly en Piet



Karl Strehmel und Rüdiger Weiner

Pieter van der Houwen und die NUMDIFF-Konferenzen

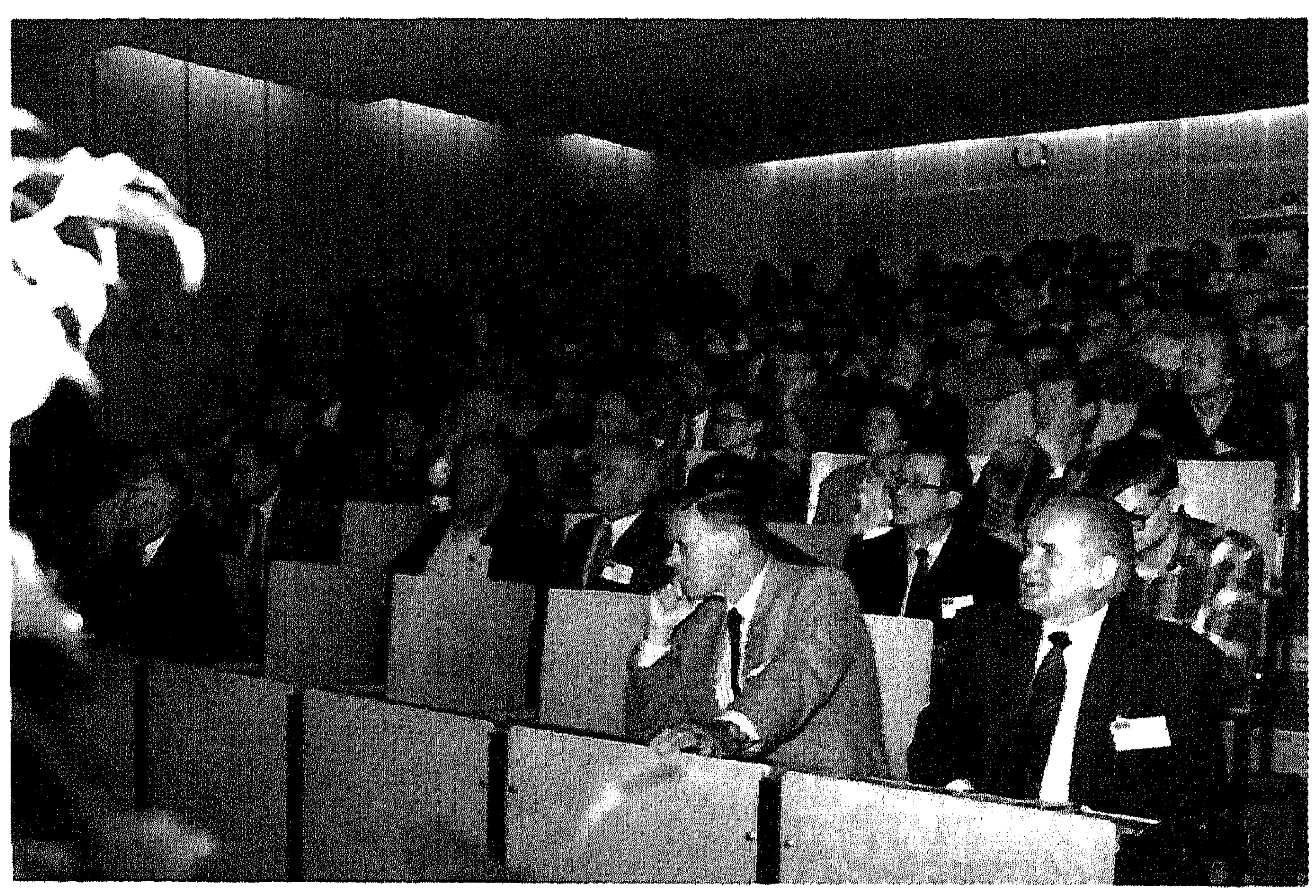
Lieber Pieter, die Verabschiedung eines Wissenschaftlers in den Ruhestand ist ein besonderes Ereignis, das es gestattet, seine Verdienste zu würdigen und ihm für seine jahrzehntelange Tätigkeit in der Forschung zu danken. Du, Pieter, hast viel bewegt und erreicht, hast wegweisende Impulse bei der numerischen Behandlung von Differential- und Volterra-Integralgleichungen und in der Software-Entwicklung für Differential- und differentiell-algebraische Gleichungen gegeben. Auf diesen Fachgebieten bist Du ein international anerkannter Mathematiker. Das Wechselspiel zwischen Anwendung, numerischer Analysis und Scientific Computing beherrschst Du in bewundernswerter Weise. Mit berechtigtem Stolz kannst Du heute auf Dein bisheriges Lebenswerk zurückblicken.

Wir möchten diese Gelegenheit nutzen, Dir nochmals sehr herzlich für Dein grobes Engagement und Dein Wirken bei der Gestaltung und dem Ausbau des Seminars "Numerical treatment of differential und differential-algebraic equations (NUMDIFF)" zu danken.

Das Seminar NUMDIFF, das erstmals im Jahre 1981 vom Institut für Numerischen Mathematik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg organisiert wurde, hatte das Ziel, unter den schwierigen politischen Bedingungen in Ostdeutschland die nationale und internationale Zusammenarbeit von Mathematikern, die auf dem Gebiet der numerischen Behandlung von Differentialgleichungen arbeiteten, zu fördern.

Du bist seit dem zweiten Seminar, das im Jahre 1983 wieder in Halle stattfand, dabei gewesen, hast es durch interessante Vorträge eigener Forschungsergebnisse bereichert und wesentlich mit dazu beigetragen, dass diese Seminarreihe heute weit über die Grenzen Deutschlands bekannt ist. Namhafte Numeriker aus dem westlichen Ausland hast Du auf NUMDIFF aufmerksam gemacht und sie ermutigt, aus diesen Tagungen ihre neuesten Forschungsergebnisse zu präsentieren. Du hast den Kontakt zu uns nicht abreiben lassen und die wissenschaftliche Zusammenarbeit zwischen Halle und dem CWI gestaltet und gefördert.

Mit der Wende im Jahre 1989 waren die Bedingungen für eine freie Entwicklung der Wissenschaft gegeben. Damit war es für uns möglich, Dich um die Mitarbeit im Organisationskomitee von NUMDIFF zu bitten. Ohne zu zögern, hast Du sofort Deine Zustimmung dazu gegeben, darüber haben wir uns sehr gefreut. Du hast dich in bewundernswerter und auf-opfernder Weise um die Entwicklung und Aussstrahlungskraft von NUMDIFF bemüht. Dir allein ist est zu verdanken, dass seit der 6. NUMDIFF-Tagung im Jahre 1992 ausgewählte Vorträge dieser Tagungsreihe in dem internationalen Journal "Applied Numerical Mathematics" publiziert werden konnten. Uns hast Du stets mit Rat zur Seite gestanden.



Selbstverständlich haben wir nicht nur gearbeitet, sondern in gemütlicher Runde auch manchmal ein "Gläschen" Wein zusammen mit Freunden getrunken. "Ein Leben ohne Feste wäre ein langer Weg ohne Einkehr" (Demokrit). Wir bedauern es sehr, dass Du, Pieter, nunmehr nach über zehn Jahren, aus gesundheitlichen Gründen aus dem Organisationskomitee von NUMDIFF ausscheiden möchtest. Mit Ben und Jan, die Du vorgeschlagen hast, konnten wir zwei würdige Nachfolger für das Organisationskomitee gewinnen.

Für den wohlverdienten Ruhestand wünschen wir Dir, Pieter, Gesundheit, aber auch weiterhin beflügelnden Kontakt mit der Numerik, und nicht zuletzt angenehme Stunden im Kreise Deiner Familie und von Freunden. Möge der Kontakt mit Halle, mit dem Institut für Numerische Mathematik der Universität Halle-Wittenberg und den NUMDIFF-Konferenzen weiterhin bestehen.

In diesem Sinne alle guten Wünsche

Karl Strehmel und Rüdiger Weiner

Halle, den 13. Juli 2000

Grensverleggend onderzoek

Beste Piet,

– Voor een man als jij met zoveel ambities ligt het voor de hand dat, als hij de kans krijgt voor vervroegd uittreden, hij die mogelijkheid met beide handen aangrijpt. Er zijn ook zoveel onderwerpen op heel verschillend terrein, die hem zo na aan het hart liggen, dat hij zich niet zal hoeven te gaan vervelen, sterker nog ongetwijfeld tijd te kort komen. Bovendien zal het voor Aly een nieuwe belevenis betekenen, haar echtgenoot nu eindelijk geheel 'thuis' te hebben. Overigens niet dat jij de wiskunde nu uit het oog zal verliezen, want daarvoor ben je een te groot vakman en zal je zeker nog wel een en ander op het vuur hebben voor verdere uitwerking.

– Je kan het geloven of niet, aanvankelijk had ik het idee om in dit verband en bij deze gelegenheid een toepasselijk robuust simultaan stelsel partiële differentiaalvergelijkingen ten tonele te voeren voor een uitgebreide numerieke beschouwing. Helaas heb ik van die gedachte moeten afzien, want de randvoorwaarden en de begrenzing van het probleem, speelden me te veel parten. Het gevolg was, dat ik al zoekende naar iets anders, ernstig de grens heb moeten verleggen. Van het heuvelachtige oplossingsgebied ben ik namelijk afgedwaald naar een heel eenvoudig vlak elementair terrein, uitmondend in een simpele optelling in de vorm van een letter-cijferpuzzel. Ik had daarbij het geluk dat je achternaam juist uit 10 verschillende letters bestaat. Wel weer toepasselijk in het licht van het gegeven dat **van der Houwen** 36 jaar in dienst van het Centrum heeft volgemaakt om tenslotte in het jaar **2000** te belanden voor vertrek.

– De optelling ziet er als volgt uit: Je weet het, voor de 10 verschillende letters dienen de 10 verschillende cijfers 0 t/m 9 te worden ingevuld zódat een correcte optelling ontstaat. Echter wel met de strenge nevenvoorwaarde dat de 4 woorden VAN, DER, HOU en WEN vertaald, 4 priemgetallen zullen voorstellen. Zelf vond ik als een oplossing:

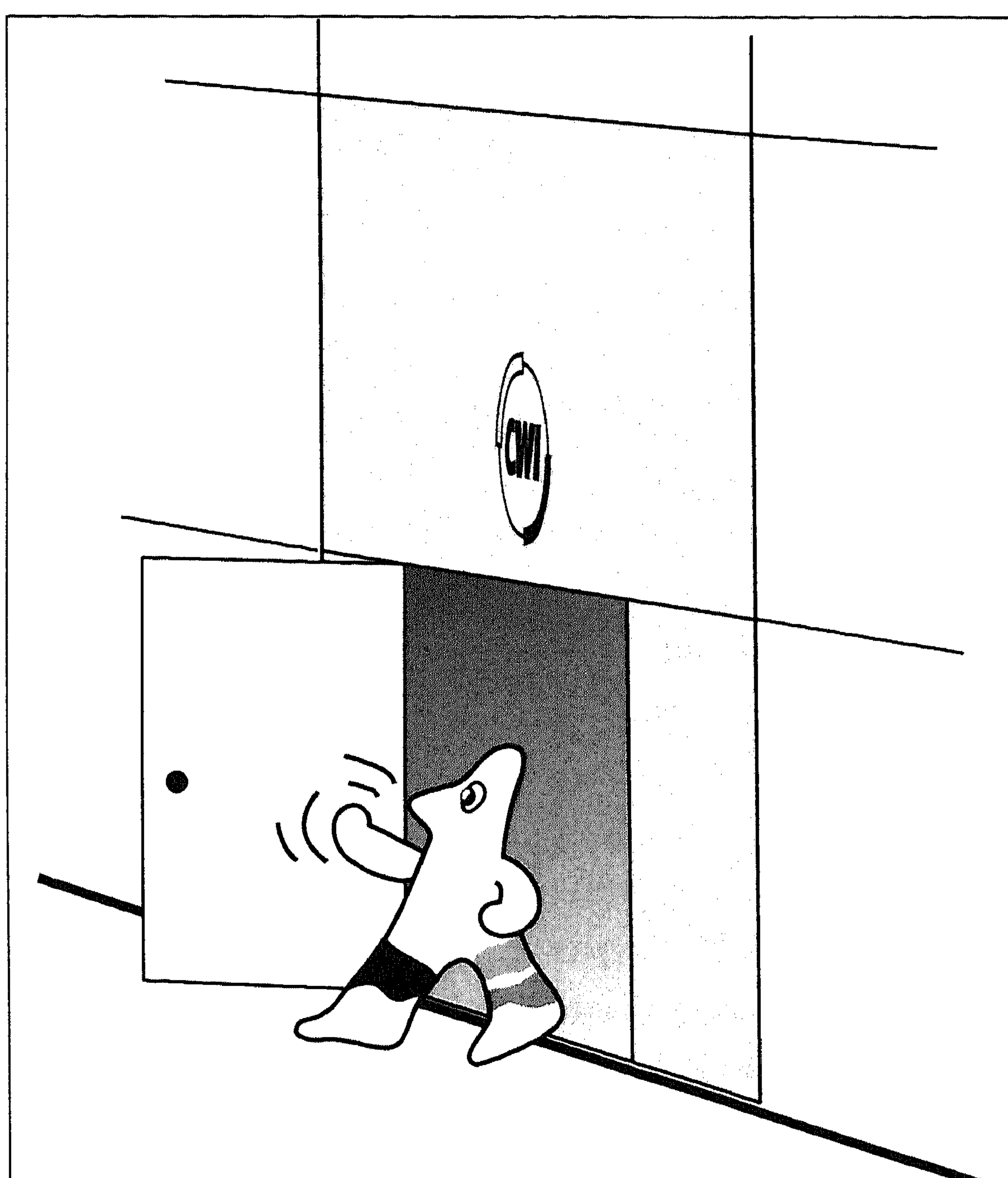
$$\text{VAN DER HOU WEN} \quad \leftrightarrow 503\ 487\ 691\ 283,$$

	V	A	N
	D	E	R
	H	O	U
	W	E	N
+		3	6
2	0	0	0

maar er zijn er wel meer, dacht ik. Ik hoop dat je de lust zal kunnen opbrengen dat eens na te gaan.

– Mag ik, mede namens Zoé, aan het einde van dit verhaal tenslotte, jou en Aly bovenal een heel goede nieuwe fase in jullie leven toewensen. Dat onze vriendschap nog tot in lengte van jaren zal voortduren.

F.J.M. Barning (oud MC/CWI-er.)



Piet verlaat de tent en wuift ons toe.
Het is mooi geweest, hij gaat naar Moe.

Over Mozart's aan Haydn opgedragen strijkkwartetten
door
Herman Bavinck

1 Inleiding

Nog niet zolang geleden haalde Piet een oude herinnering op over het eerste bezoek dat Piet en Aly ongeveer 35 jaar geleden aan mij brachten. Piet en ik waren toen beiden sinds kort medewerker op het Mathematisch Centrum bij de afdeling Toegepaste Wiskunde. Ik was toen nog niet getrouwd en woonde op een kamer vier-hoog in de Nickeriestraat. Mijn laatste muzikale aanwinst op dat moment was een plaat van het Nederlands Strijkkwartet, waarop zij van Mozart het Jachtkwartet (KV 458) en het Dissonantenkwartet (KV 465) speelden. Vooral het Dissonantenkwartet had grote indruk op mij gemaakt, mede door de pagina's die Wouter Paap in zijn Prismaboekje: *Muziek, modern en klassiek* (p. 48-54) eraan had gewijd. Ik had de partituur uit de muziekbibliotheek geleend en wilde mijn bezoek van mijn ontdekking laten meegenieten, mede door te vertellen wat ik net over dit werk had gelezen. Na al die jaren vertelde Piet mij dat dit niet echt gelukt was. Aly en hij waren toen nauwelijks in muziek geïnteresseerd en nog helemaal niet rijp voor de klankwereld van het strijkkwartet. Mijn aanbod, of ze het stuk misschien met de partituur wilden volgen, kwam bij hen, die geen muziek konden lezen, als absurd over.

Er is wel wat veranderd. Thans zijn Piet en Aly enthousiaste muziekliefhebbers, die regelmatig concerten bezoeken en beschikken over een grote collectie "ingeblikte" muziek. Het lijkt me dan ook aardig, om als bijdrage voor dit Liber Amicorum maar eens op te schrijven, wat mij 35 jaar geleden zo bezig hield, in de verwachting dat mijn bespiegelingen (die overigens geheel aan anderen ontleend zijn) nu in betere aarde zullen vallen.

2 Haydn en het strijkkwartet

Haydn kan met recht de vader van het strijkkwartet worden genoemd. Gedurende zijn hele leven heeft hij strijkkwartetten geschreven, waaronder vele meesterwerken. De combinatie strijkkwartet (2 violen, altviool, cello) is in Italië voor het eerst gebruikt (Sammartini, Tartini), waarbij in die muziek de eerste viool de melodie voordraagt en de andere instrumenten begeleiden. Ook in de vroegste kwartetten van Haydn is dat nog enigszins het geval. Maar het idee van gelijke rechten voor iedereen deed in de achttiende eeuw opgang en zou een van de idealen van de

Franse revolutie worden. Het is opmerkelijk hoe de geest van de tijd ook zijn weerslag vindt in de muziek. Haydn verleende de vier stemmen van het kwartet een grote zelfstandigheid en gelijkwaardigheid en vanaf zijn uit 1781 stammende "Russische" kwartetten (op. 33) hanteerde hij de componeertechniek om de verschillende motieven waaruit een thema is opgebouwd zich in de loop van het stuk te laten ontwikkelen. Haydn was zich deze nieuwe aanpak terdege bewust, want in het begeleidingsbriefje, waarmee hij deze kwartetten opdroeg aan Ernst zu Oettinger-Wallenstein, vermeldt hij dat deze werken "auf eine ganz neue besondere Art" gemaakt zijn. Deze wijze van componeren heeft veel navolging gevonden.

3 Mozart en Haydn

Mozart was zeer onder de indruk van Haydn's "Russische" strijkkwartetten en ze inspireerden hem tot het schrijven van zes strijkkwartetten die tussen 1782 en 1785 ontstonden (resp. KV 387, 421, 428, 458, 464 en 465). Haydn en Mozart waren vrienden die elkaar zeer respecteerden . Op een februariavond in 1785, toen Leopold Mozart zijn zoon in Wenen bezocht, was Haydn toevallig ook in Wenen en er werd een bijeenkomst georganiseerd, waarbij Mozarts nieuwe kwartetten KV 458, 464 en 465 door Haydn, de twee baronnen Tindi en de componist zelf gespeeld werden. Haydn nam Leopold Mozart terzijde en zei: "Ich sage Ihnen vor Gott als ein ehrlicher Mann, Ihr Sohn ist der größte Komponist, den ich von Person und dem Name nach kenne...". Deze sterke uitspraak van een man, wereldberoemd en op het toppunt van zijn kunnen, moet Leopold veel vreugde hebben verschaft. De 29-jarige Wolfgang heeft daarop zijn bewondering voor zijn 24 jaar oudere vriend geuit door dit zestal strijkkwartetten aan Haydn op te dragen (de kwartetten worden sindsdien de Haydn-kwartetten van Mozart genoemd) met het volgend begeleidende briefje (in de appendix is de originele italiaanse tekst afgedrukt):

Mijn beste vriend Haydn.

Een vader, die besloten heeft zijn kinderen de wijde wereld in te sturen, acht het noodzakelijk ze aan de bescherming en leiding van een daar zeer beroemd man toe te vertrouwen, temeer indien deze gelukkigerwijze ook nog zijn beste vriend is.

Hier zijn dan, beroemde man en dierbaarste vriend, mijn zes zonen.

Ze zijn inderdaad de vrucht van een lange en ingespannen arbeid, maar de hoop die verscheidene vrienden mij gaven, dat ik tenminste ten dele deze moeite beloond zou zien, gaf mij de moed de gedachte te koesteren, dat deze kinderen mij eens tot troost zouden zijn.

U zelf, beste vriend, hebt tijdens Uw laatste verblijf in deze hoofdstad mij Uw tevredenheid betuigd.

Deze Uw steun heeft mij boven alles bezield en daarom beveel ik ze U aan en waag het te hopen dat zij Uw gunst niet geheel en al onwaardig zijn.

Moge U ze genadig aannemen en hun vader, leider en vriend zijn! Vanaf dit ogenblik draag ik U mijn rechten op hen over; ik vraag U ook met welwillendheid de fouten die misschien aan het vaderlijke partijdige oog ontsnapt zijn, aan te zien en desondanks Uw edele vriendschap met hem, die haar zo hoog schat, te willen voortzetten.

Inmiddels verblijf ik van ganser harte Uw oprechte vriend

W.A. Mozart

4 Mozart en Bach

De muziek van Johann Sebastian Bach was in de jaren tachtig van de achttiende eeuw niet populair. Net als hun tijdgenoten voelden zelfs Bachs eigen zonen, die begaafde componisten waren, niets meer voor de meerstemmige, contrapuntische stijl van de Thomascantor: de tijd van de "galante stijl" was aangebroken. In Wenen was er echter één muziekkenner die muziek van Bach bezat en daar propaganda voor maakte, nl. Baron Gottfried van Swieten, een Nederlander van geboorte. Hij had een tijdje in Berlijn aan een gezantschap gewerkt en daar de werken van Bach en Händel leren kennen. Op zondagmiddagen belegde hij bij hem thuis muziekbijeenkomsten, waarvoor vooral componisten werden uitgenodigd en waar deze werken aan de orde werden gesteld. Mozart was een trouw en zeer enthousiast bezoeker van deze studiemiddagen en hij maakte zich de barokke muziekstijl geheel eigen. Hij componeerde diverse fuga's (bijv. Preludium en fuga in C gr. KV 394, Adagio en fuga voor strijkorkest KV 546 en de (onvoltooid gebleven) fuga in de vioolsonate KV 402), maar belangrijker is dat Mozart Bachs componeerstijl zo heeft verwerkt, dat het deel uitmaakte van zijn eigen muzikale wereld. Bij de Haydn-kwartetten horen we dat het duidelijkst bij de finale van het kwartet KV 387, maar ook in de andere kwartetten kunnen van die polyfone passages worden gevonden.

5 Het Dissonantenkwartet

Het strijkkwartet in C gr. KV 465 van Mozart wordt "Dissonantenkwartet" genoemd vanwege de inleiding, die destijds veel toehoorders en uitvoerders in verwarring bracht. Verschillende mensen die de muziek toen hadden aangeschaft stuurden de gedrukte partijen terug naar de uitgever Artaria met het verzoek de drukfouten te verbeteren. Men heeft wel verondersteld dat Mozart met het gebruik van deze dissonanten iets heeft aangeduid dat met zijn intrede in de vrijmetselaarsloge samenhing. Het werk is gedateerd 14 januari 1785 te Wenen. Een maand eerder, op 17 december 1784, was Mozart als broeder in de loge "Zur Wohlthätigkeit" opgenomen. Het vijfde (gedateerd 10 januari 1785) en het zesde van de Haydn-kwartetten zijn de eerste werken die de nieuwe broeder, wellicht nog onder de indruk van de inwijdings-ceremonieën, heeft geschreven. Het "Allegro" dat na de "Adagio"-inleiding volgt, is een prachtig voorbeeld van de wijze waarop Mozart de nieuwe kwartetstijl van Haydn zich eigen heeft gemaakt. Het beginmotief is door Mozart uitverkoren om tot zelfstandige groei te geraken. We komen het tegen, opklimmend van de laagste naar de hoogste van de vier stemmen, we horen het in de omkering (dalend i.p.v. stijgend) en in tal van varianten, waarin het ritme hetzelfde blijft, maar de noten veranderd zijn. Ook uit de volgende delen "Andante cantabile", "Menuetto" en "Allegro" blijkt Mozarts meesterschap ten volle.

6 Appendix

Het titelblad van de Haydn-kwartetten van Mozart luidt:

Sei
Quartetti
per due Violini, Viola e Violoncello.
Composti e Dedicati
al Signor
Giuseppe Haydn
Maestro di Capella di S. A.
il Principe d'Esterhazy &c &c
Dal Suo Amico
W.A. Mozart
In Vienna preßo Artaria Comp.
Mercanti ed Editori di Stampe, Musica,
e Carte Geografiche
Cum. Priv. S.C.M. Prezzo f 6.30.

Mozarts opdrachtbrief aan Joseph Haydn, gedateerd 1 september 1785:

Al mio caro Amico Haydn.

Un Padre, avendo risolto di mandare i suoi figlj nel gran Mondo, stimò doverli affidare alla protezione, e condotta d'un Uomo celebre in allora, il quale per buona sorte, era di più il suo migliore Amico.

Eccoti dunque del pari, Uom celebre, ed Amico mio carißimo i sei miei figlj.

Eßi sono, è vero il frutto di una lunga, e laboriosa fatica, pur la speranza fattami da più Amici di vederla almeno in parte compensata, m'incorraggisce, e mi lusinga, che questi parti siano per eßermi un giorno di qualche consolazione.

Tu steßo Amico carißimo, nell' ultimo tuo Soggiorno in questa Capitale, me ne dimostrasti la tua soddisfazione.

Questo tuo suffragio mi anima sopra tutto, perchè Jo te li raccommandi, e mi fa sperare, che non ti sembreranno del tutto indegni del tuo favore.

Piacciati dunque accoglierli benignamente; ed esser loro Padre, Guida, ed Amico! Da quest momento, Jo ti cedo i miei diritti sopra di eßi: tisupplico però di guardare con indulgenza i difetti, che l'occhio parziale di Padre mi può aver celati, e di continuar loro malgrado, la generosa tua Amicizia a chi l'apprezza, mentre sono di tutto Cuore.

Amico Carißimo il tuo Sincer[i]ßimo Amico

W.A. Mozart

Piet van der Houwen en Stabiliteit

door

Dirk Dekker

Bij het afscheid van Piet van der Houwen wil ik stil staan bij zijn wetenschappelijke loopbaan, vooral waar die met de mijne verweven is geweest. Ik put hierbij niet alleen uit mijn geheugen, maar ook, onder andere, uit een deel van de serie jaarverslagen van het Mathematisch Centrum (MC) [1].

Piet werd op 1 april 1964 assistent op het MC in de afdeling Toegepaste Wiskunde (TW) en behaalde in oktober van dat jaar zijn doctoraal diploma Wiskunde aan de UvA. Daarna werd hij onmiddellijk bevorderd tot wetenschappelijk medewerker. Dit alles zal mijn aandacht toen nog niet hebben getrokken, want ik werkte in die tijd op de Reken-afdeling (RA) van het MC; die was wel op dezelfde gang, de derde verdieping van het gebouw aan de Tweede Boerhaavestraat, maar zo innig was de omgang tussen deze twee afdelingen toen nog niet. Dit zou echter, mede door de inzet van Piet, spoedig veranderen zoals uit het vervolg zal blijken.

De eerste publicatie van Piet was, voor zover ik kan nagaan, Report TW 100:'On the stability of a difference scheme for the North Sea Problem', gedateerd March 1966 [2].
De belangstelling van Piet voor stabiliteit bleek reeds eerder uit zijn bijdragen in een colloquium 'Stabiliteit van differentieschema's', dat de afdeling TW organiseerde in samenwerking met de RA. Dit was de eerste activiteit waarin Piet en ik samenwerkten, zie de publicaties [3] [4].
Stabiliteit was blijkbaar de eerste interesse van Piet en is, naast de nodige zorg voor voldoende nauwkeurigheid, de belangrijkste leidraad voor zijn onderzoek gebleven.

In 1968, op 3 april, promoveerde Piet bij professor Lauwerier op het proefschrift: 'Finite difference methods for solving partial differential equations', dat in hetzelfde jaar verscheen als MC Tract 20 [5]. Daarna werd onze samenwerking meteen inniger, zij het aanvankelijk op grote afstand. Op 1 juli 1968 stapte Piet over naar de RA en werd daar waarnemend souschef van de Numerieke sectie ter vervanging van mij tijdens mijn verblijf voor een jaar in de USA.

Onze samenwerking uitte zich in een levendige onderlinge correspondentie over allerlei zaken. Na mijn terugkeer uit de USA ging Piet op 1 augustus 1969 weer terug naar de afdeling TW en werd daar souschef. Hij volgde er in die hoedanigheid Reind van de Riet op die te zelfder tijd van TW naar RA overstapte en daar souschef van de Programmeersectie werd. Zo vormden Reind, Piet en ik als souschefs in die tijd een nauw samenwerkend driemanschap.

Piet raakte zo geleidelijk meer thuis in informaticakringen. Dit blijkt bijvoorbeeld uit zijn bijdrage aan het MC-25 Informatica Symposium getiteld: 'A survey of stabilized Runge-Kutta methods' [6], welk symposium werd gehouden op 6 en 7 januari 1972 ter viering van het 25-jarig jubileum van Professor dr ir Aad van Wijngaarden.

Op 1 april 1972 ging Piet van de afdeling TW weer over naar de RA en werd souschef van de sectie Numerieke wiskunde. Deze functie kwam beschikbaar omdat ik in 1971 naar de UvA vertrok en Reind, die daarna een half jaar souschef ad interim van deze sectie was geweest, naar de VU vertrok. Vanaf 1973 werd de RA gesplitst in een afdeling Numerieke Wiskunde (NW), waarvan Piet de chef werd, en een afdeling Informatica met Jaco de Bakker als chef. Onze wegen liepen nu uiteen, maar onze samenwerking en nauwe contacten zouden blijven.

Wij werkten bijvoorbeeld samen in het 'Colloquium Stijve Differentiaalvergelijkingen' [7] [8]; bij deze soort vergelijkingen speelt de eerder genoemde stabiliteit, zoals bekend, een centrale rol. Op het gebied van numerieke programmatuur volgde een jarenlange samenwerking in de 'Losbladige Reeks' (1970 - 1973), NUMAL (1974 - 1981) [9] en later onder meer de NUMVEC library voor vector processors.

Op 1 januari 1975 werd Piet benoemd tot bijzonder hoogleraar aan de UvA vanwege de Stichting voor Hoger Onderwijs in de Toegepaste Wiskunde, met de leeropdracht 'Numerieke wiskunde en informatica'. Uit deze leeropdracht blijkt dat zowel het numeriek-wiskundige als het informatica-aspect van zijn werk werd gewaardeerd. Piet leverde een belangrijke bijdrage aan fundamenteel onderzoek inzake algoritmen voor differentiaal- (en later ook integraal-) vergelijkingen, met bijzondere aandacht voor stabiliteit en geschiktheid voor moderne computerarchitecturen, met name vector processoren en parallelle systemen. Bovendien zorgde hij er voor dat onder zijn leiding desbetreffende numerieke programmatuur werd ontwikkeld en zijn algoritmen in vele projecten werden toegepast.

Was het MC, inmiddels omgedoopt tot CWI, decennia lang uiterst stabiel, de UvA was veel meer aan verandering onderhevig. Toen Piet aan de UvA benoemd werd, kwam hij terecht in de Vakgroep Informatica en Numerieke wiskunde (VIN) van de Subfaculteit der Wiskunde (SW). Sinds 1981 startte de studierichting Informatica, verzorgd door de Facultaire Vakgroep Informatica (FVI) van de Faculteit der Wiskunde en Natuur-wetenschappen (FWN). Later werd deze faculteit opgeheven en de Faculteit der Wiskunde en Informatica (FWI) gevormd met een vakgroep Wiskunde en drie hoofdzakelijk informatica-gerichte vakgroepen. Wij waren als VIN toen zo stout om en bloc over te stappen naar de informatica-vakgroep Computersystemen, zoals bijvoor-beeld in de USA numerici vaak in Computer science departments werken. Na mijn emeritaat ging de numerieke groep echter weer naar de vakgroep Wiskunde, sinds 1997 het 'Korteweg-De Vries-Instituut'. Ter completering van de instabiliteit van de UvA is de FWI inmiddels, via de Faculteit WINS, opgegaan in de grote Faculteit NWI.

Er heerste in de FWI een zekere hierarchie, zelfs soms onder hoogleraren. Dit bleek bij een ronde functioneringsgesprekken die op last van bestuurderen eenmaal, en wel in 1991, hebben plaats gevonden. In dat kader mocht ik met Piet zo'n gesprek hebben omdat, zoals bestuurders bepaald hadden, en op het 'functie-informatie'-formulier voor Piet was ingevuld, ik voor hem was de 'hoogleraar in overeenstemming met wie de werkzaamheden worden vervuld'. Als ik nu kijk naar dit formulier met de handtekening van Piet eronder, verbaast mij dit achteraf. Ik dacht dat hoogleraren altijd gelijkwaardig waren. Of was een gewone hoogleraar toch een trapje hoger dan een bijzondere? In elk geval heb ik dit nooit zo ervaren. Wij hebben altijd collegiaal en in de beste verstand-houding samengewerkt.

Een mooi stukje samenwerking in mijn laatste jaar aan de UvA was onze bijdrage aan de AiO-cursus 'Parallelle numerieke algoritmen' in het voorjaar van 1992. Deze cursus bestond uit twee delen: 'Parallelle algoritmen in numerieke algebra' gegeven door mij en 'Parallelle algoritmen voor differentiaalvergelijkingen' gegeven door Piet.

Ter dankbare herinnering aan onze samenwerking lever ik graag deze bijdrage aan het Liber Amicorum voor Piet.

[1] Stichting Mathematisch Centrum: Jaarverslagen;
2e Boerhaavestraat 49, Amsterdam (O).

[2] P.J. van der Houwen, On the stability of a difference scheme for the North Sea Problem; March 1966, Mathematisch Centrum Amsterdam.

[3] G.J.R. Förch, P.J. van der Houwen & R.P. van de Riet:
Colloquium Stabiliteit van differentie-schema's, deel 1;
MC Syllabus 2.1, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1967.

[4] L. Dekker, T.J. Dekker, P.J. van der Houwen & M.N. Spijker:
Colloquium Stabiliteit van differentieschema's, deel 2;
MC Syllabus 2.2, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1968.

[5] P.J. van der Houwen, Finite difference methods for solving partial differential equations; MC Tracts 20, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1968.

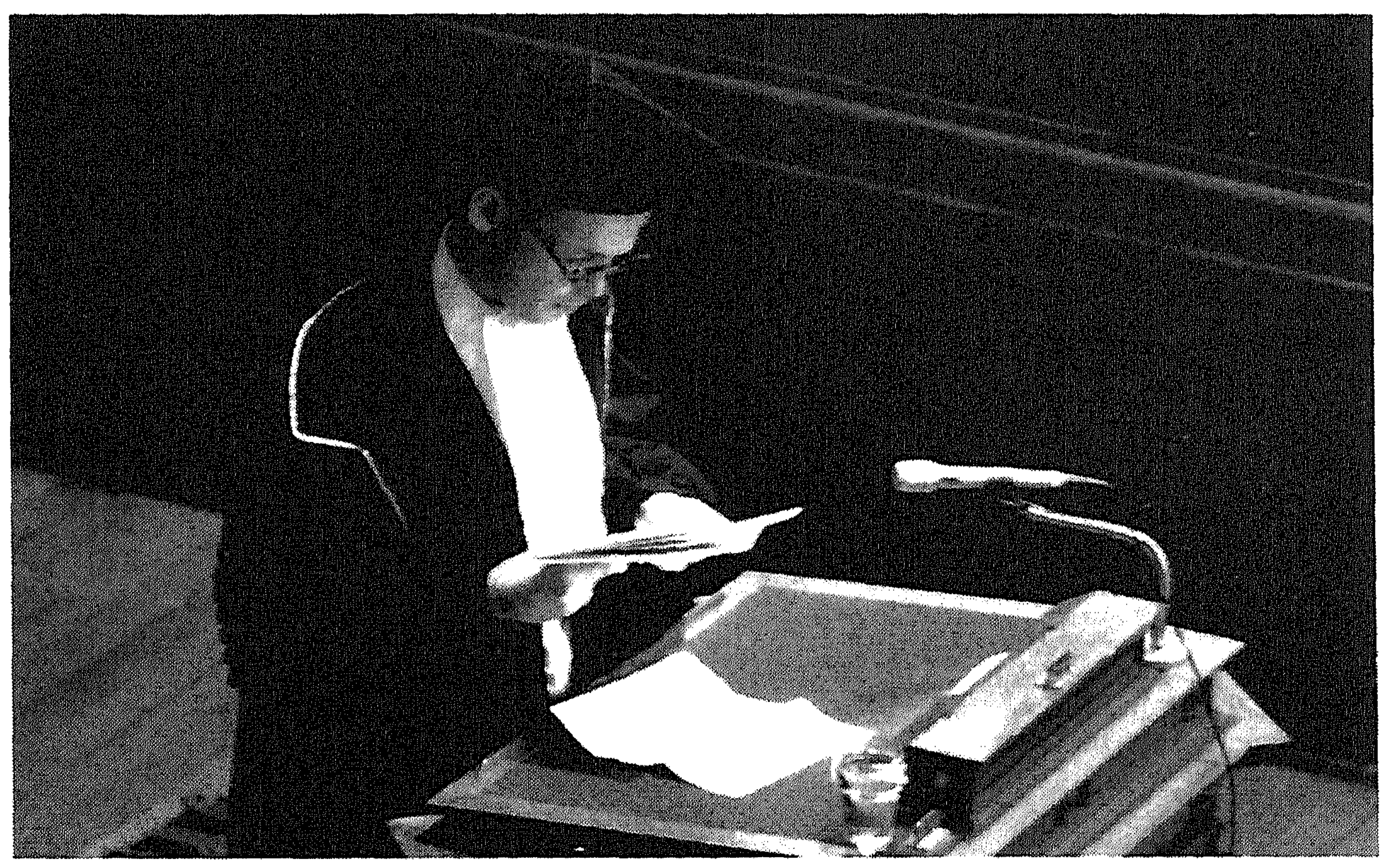
[6] J.W. de Bakker, G.A. Blaauw, A.J.W. Duijvestijn (co-auteurs: G.A.M. Kamsteeg - Kemper & J.P. Schaap - Kruseman), E.W. Dijkstra, P.J. van der Houwen, F.E.J. Kruseman Aretz, W.L. van der Poel, M.V. Wilkes & G. Zoutendijk:
MC-25 Informatica symposium; Mathematical Centre Tracts 37, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1971.

[7] T.J. Dekker, P.W. Hemker & P. J. van der Houwen,
Colloquium Stijve Differentiaalvergelijkingen, deel 1;
MC Syllabus 15.1, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1972.

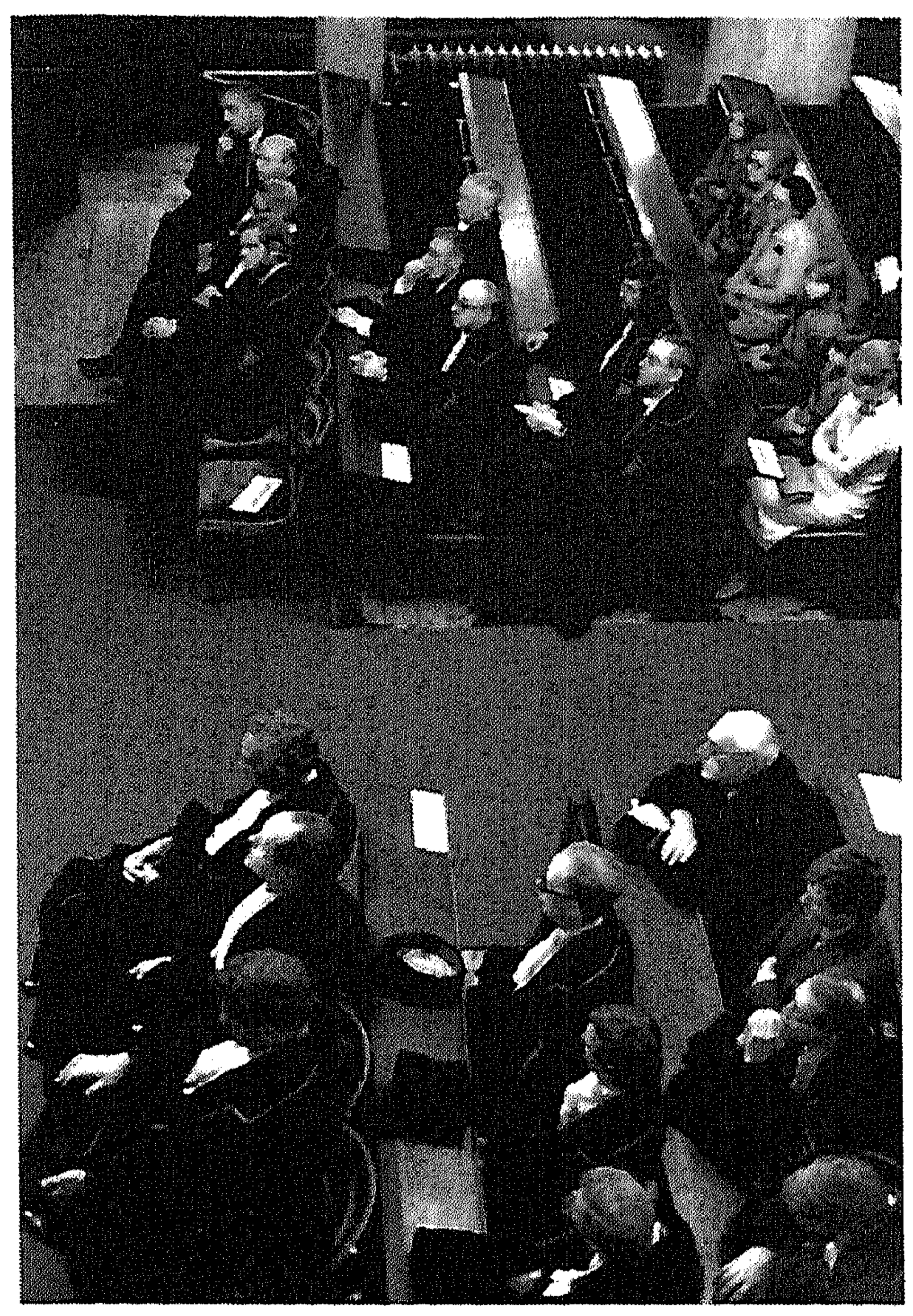
[8] P.A. Beentjes, K. Dekker, H.C. Hemker, S.P.N. van Kampen & G.M. Willems, Colloquium Stijve Differentiaalvergelijkingen, deel 2;
MC Syllabus 15.2, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1973.

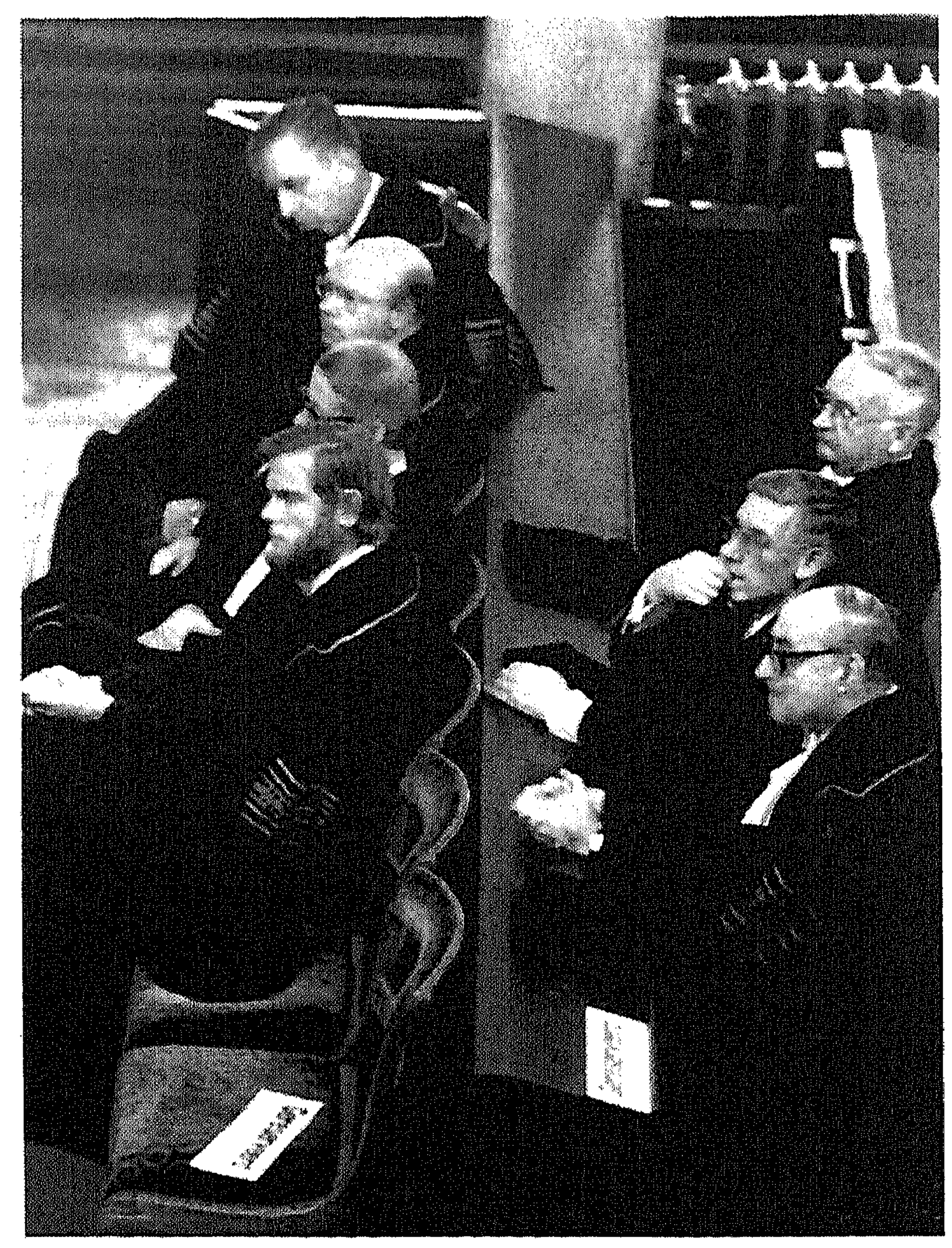
[9] P.W. Hemker (editor), NUMAL, Numerical procedures in Algol 60;
MC Syllabus 47, vol. 1 - 7, Mathematisch Centrum Amsterdam, 1981.

Piet's Friends Then



When Piet presented his inaugural address as Extraordinary Professor at the University of Amsterdam on Oct. 25 1976, I just had started my campaign of making pictures of all activities in Mathematics and Computer Science which I attended.
This makes Piets *Oratie* the first in my collection and provides us with an answer to the question: *What did his friends look like then.....*





A European Gentleman

"How would you describe this wine?" Piet asked me, and my blood pressure doubled. I have an aversion to this kind of directed question. If the question had just been thrown out for discussion, I could have sat in silence, but now everyone was waiting for me to give an answer, and my mind was completely blank: in my life I had never tried to describe the taste of a wine. In Kansas there is only one vineyard—I once brought a bottle of this wine back with me, and a somewhat critical French colleague described it as "marmalade". But "like wine" was probably not the answer they were waiting for, so I took a sip, and the only thing I could come up with was *brand*—"fire" in Dutch (agreeably a very strange taste for wine), but the word I was really looking for was *verbrand*—"burnt"—still not quite right, but then it would have been a failure of articulation rather than of language. Later I heard Piet say *rokerig*—"smoky", and of course this rang true. Nonetheless, I considered it a moment of personal achievement for my otherwise underdeveloped taste buds that they had roughly concurred with the well-respected palate of Piet van der Houwen.

As an American growing up in Kansas, one develops an idea of a European Gentleman: he *knows* wine, listens to classical music, plays chess. He speaks a number of languages fluently and his mother tongue impeccably. Above all, he is gracious. Such a refined taste is not common in Midwest America, and one can imagine why my first impression of Piet cast him in this archetype. Of course, it is the degree of the deviation from such a type which is the real measure of a person's character, and although I don't know Piet as well as some, there are a few divergences which strike me as indicative of his great breadth of character: the feeling present in his voice when telling about his dogs; the appreciation—second to that for fine wine, surely—also for a good beer; and the preference, when on vacation in Tuscany, for sleeping in a tent instead of a hotel room. These are interests with which even a typical Midwestern American can relate.

During the short year that Piet and I cooperated, I was—as were many of his collaborators over the years, I'm sure—slightly in awe of his productivity. A good idea would be suggested in the regular group meeting on Tuesday, and by Thursday he had written the first 10-page draft of an article on the subject, complete with theorems. Needless to say, my dissertation benefitted gratefully from Piet's prolific pen, and I consider it a special honor to be his last PhD student.

Piet, I wish you and Aly all happiness in your retirement.

Jason Frank

Beste Piet,

Toen ik het verzoek ontving een bijdrage te leveren voor jouw Liber Amicorum, realiseerde ik me dat het inmiddels meer dan acht jaar geleden is dat ik mijn promotieonderzoek bij het CWI heb afgerond. Dit is een mooi ogenblik om weer even terug te kijken op mijn CWI periode.

Met zeer veel plezier heb ik onder jouw begeleiding bij het CWI gewerkt aan mijn promotieonderwerk "Numerieke methoden voor de drie-dimensionale ondiepwatervergelijkingen". Het berekenen van waterstanden in zeeën, riviermondingen en in rivieren is iets wat veel Nederlanders aanspreekt en jou zeer zeker ook. Het bekendste voorbeeld is wellicht het zogeheten Continental Shelf model, wat nog steeds bij het KNMI gebruikt wordt voor de voorspelling van waterstanden langs de Nederlandse kust (zie bijgevoegd figuur). Naast natuurlijk de Runge-Kutta-methoden, is de ondiepwatervergelijkingen een onderwerp dat in jouw gehele wetenschappelijke loopbaan terug te vinden is. Vanaf de zestiger jaren tot in het nieuwe millennium heb je hierover gepubliceerd. Aan het einde van de jaren zestig was het trouwens toch al een onderwerp dat veel wetenschappers bezig hield, zie o.a. de publicaties van andere nationale en internationale namen, zoals Lauwerier, Leendertse en Heaps.

Mede vanwege de beperkte computercapaciteit in de jaren zestig, werd er toentertijd onderzoek verricht naar numerieke methoden voor de twee-dimensionale (diepte-gemiddelde) ondiepwatervergelijkingen. Ongeveer 25 jaar na jouw eerste publicatie op dit gebied, in een tijd van veel grote computercapaciteit (vectorcomputers en de eerste parallelle computers), heb ik me met veel plezier mogen wijden aan de drie-dimensionale ondiepwatervergelijkingen. Ik herinner me nog goed dat we vrijwel iedere vrijdagmiddag, tezamen met Ben Sommeijer, bij elkaar kwamen om de voortgang van het project te bespreken. De besprekingen verliepen altijd in zeer prettige sfeer. Een plezierige onderlinge verstandhouding is trouwens iets wat ik van al mijn CWI collega's heb ervaren en wat volgens mij kenmerkend is voor het CWI.

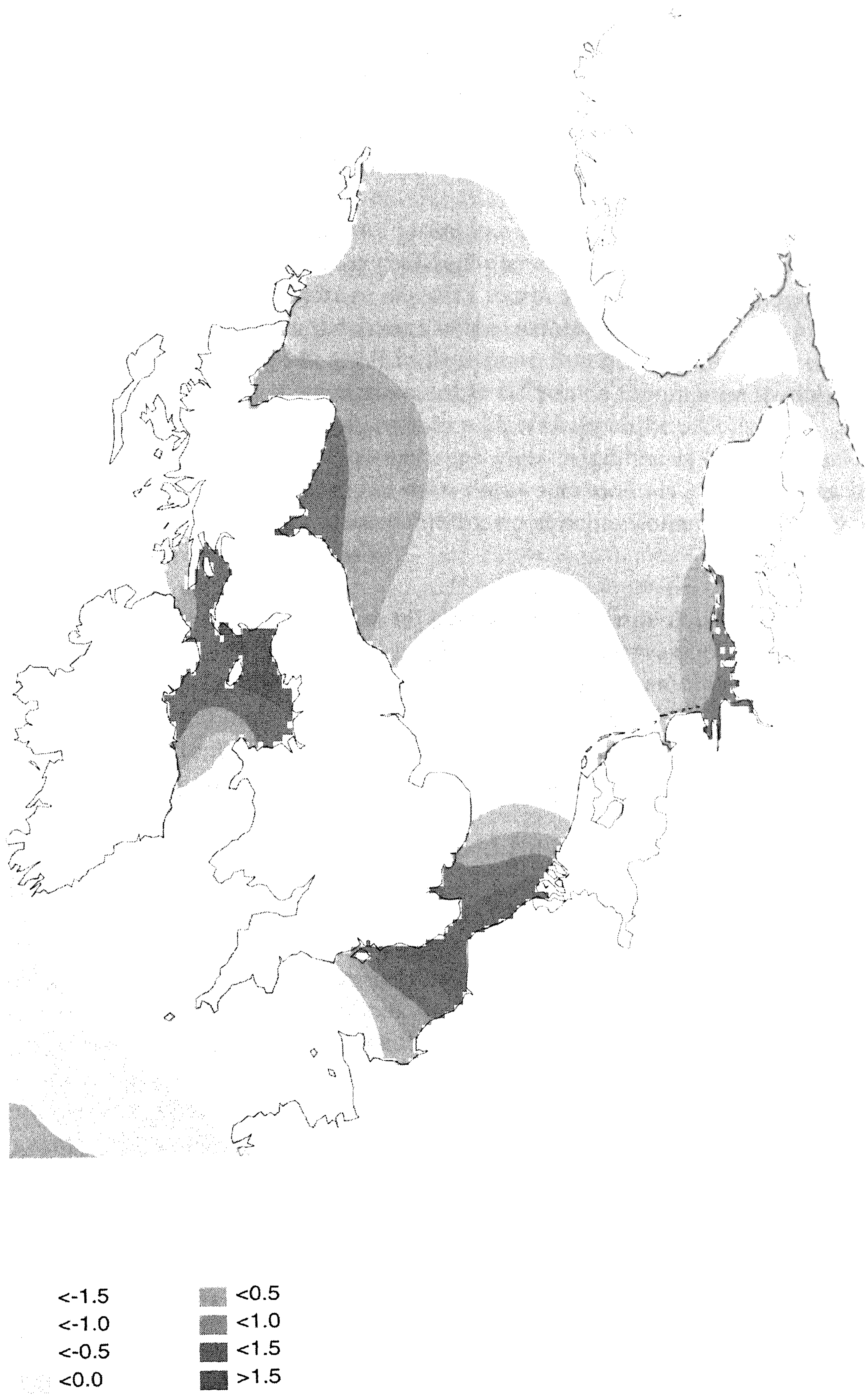
Nu ik de naam van Ben heb laten vallen, het me te binnen dat bij jouw vorige feestelijke aangelegenheid (jouw 25-jarig dienstverband) Ben een 25-ste orde Runge-Kutta-methode geconstrueerd had, wat er zeer indrukwekkend uitzag. Nu je bij het volgende kwadraat ben aangekomen (jouw 36-jarig dienstverband), ben ik benieuwd of Ben deze keer met een 36-ste orde Runge-Kutta-methode op de proppen komt.

Naast de goede sfeer bij het CWI en de inhoudelijke ontwikkeling die je doormaakt bij een promotieonderzoek, is mij ook de grote nauwgezetheid bijgebleven waarmee Ben en jij mijn rapportages controleerden. Het kort en zakelijk rapporteren is iets wat ik in mijn CWI periode geleerd heb en waarvan ik regelmatig merk dat ik daar profijt van heb. Mijn CWI periode is een heel goede leerschool geweest voor mijn huidige werk bij het Waterloopkundig Laboratorium, waarvoor ik jou en mijn andere CWI collega's nogmaals wil bedanken.

Aan het einde van mijn bijdrage wil ik de gastvrijheid van Aly en jou noemen. Met enige regelmaat werden we bij jullie thuis uitgenodigd in Bussum, wat altijd heel gezellig was. Het feit dat jullie toentertijd voor mijn Vietnamese CWI-kamergenoot Nguyen huu Cong een promotiediner bij jullie thuis hebben georganiseerd, is daar een heel goed voorbeeld van.

Aly en Piet, nog vele jaren in goede gezondheid toegewenst. Het ga jullie goed.

Erik de Goede


<-1.5
<-1.0
<-0.5
<0.0
<0.5
<1.0
<1.5
>1.5

Amsterdam, augustus 2000

Beste Piet,

Mijn bijdrage aan jouw Liber Amicorum kan niet groot zijn, immers hebben wij in de afgelopen jaren niet zo heel veel met elkaar te maken gehad. Maar toen de oproep voor een bijdrage aan dit Liber Amicorum werd rondgestuurd, wist ik toch meteen dat ik iets wilde memoreren.
In mei 1992 kwam ik bij het CWI in de nieuwe functie van Hoofd Facilitaire Dienst. Uit hoofde van die functie werd ik lid van de toenmalige Instituuts Raad en ontmoette jou als hoofd van de wetenschappelijke afdeling Numerieke Wiskunde. Ik heb me wel eens afgevraagd hoe al die gerenommeerde beta wetenschappers tegen mijn vrouwspersoon als gewone alpha in de IR aankeken. Daar zal ik waarschijnlijk nooit achterkomen, dat zal wel een goed bewaard geheim blijven.

Hoewel pas zes weken werkzaam bij het instituut draaide ik direct mee met het project 'functioneringsgesprekken bij het CWI' dat was opgezet door Leeuwendaal Advies BV, een bureau voor management en organisatie.
Het project had ten doel dat een verbeterde functievervulling van alle medewerkers gerealiseerd zou kunnen worden, met het functioneringsgesprek als instrument, waarbij de leidinggevenden een belangrijke communicatieve rol zouden hebben.
Het houden van dit soort gesprekken moest getraind worden vandaar dit project.
Een aantal cursusdagen werd gepland en wij zaten samen in de groep die op maandag 15 juni 1992 bij elkaar kwam. Onder de bezielende leiding van medewerkers van Leeuwendaal Advies BV, de namen ben ik vergeten, werden wij bestookt met definities, doelstellingen, procedures en technieken.
Tal van communicatie kreten kwamen voorbij zoals: verbaal, non-verbaal, gebaren, oogcontact, para-linguïstiek, spreektempo, volume, wederzijdse beïnvloeding, referentiekaders, inhoud, relaties enz.
Voor mijzelf was het allemaal niet zo nieuw, omdat ik in vorige functies ook al de nodige trainingen en cursussen in dit kader volgde, maar het was een nuttige dag.

Vanwaar nu dit hele verhaal zul je je misschien afvragen of is er toch al iets boven komen drijven als gezamenlijke herinnering ?
Wij werden immers samen gebracht om als koppel een rollenspel te spelen. Met name deze herinnering staat mij nog heel goed bij. Helaas heb ik de originele teksten van onze rollen niet terug kunnen vinden. Het was leuk geweest die teksten te kunnen publiceren, maar ondanks mijn speurwerk heb ik niets kunnen vinden en misschien hebben we die teksten terug moeten geven, dat weet ik niet meer.
Wel weet ik nog precies hoe onze verschillende rollen waren.
Niet het rollenspel was voor mij nieuw maar wel de rol zelf, want ik zou de rol van een afdelingshoofd van een wetenschappelijke afdeling spelen en jij was een wetenschappelijk medewerker. Jouw rol stond mijns inziens voor jou veel dichter bij de werkelijkheid dan die van mij.
Jij hebt waarschijnlijk geen idee wat er door mij heen ging om juist deze rol te moeten spelen samen met iemand van jouw status als wetenschapper in dit instituut.

In grote lijnen herinner ik mijn rol als volgt: mijn wetenschappelijk medewerker, die nogal was vastgeroest in zijn eigen wetenschappelijk onderwerp, moest gemotiveerd worden om onderzoek te gaan doen naar een ander wetenschappelijk thema. Het nieuwe thema werd hem opgelegd en hij was absoluut niet van plan daaraan gevolg te geven.
In jouw rol als die wetenschappelijk medewerker moest je vasthouden aan je eigen onderzoeksthema, waarvoor je heel veel argumenten had en hij wilde bovendien helemaal geen verandering.
We kregen een paar minuten om ons in te lezen en in gezelschap van een observant speelde we de casus.

Bij mij stond het zweet op mijn rug en voelde me ongemakkelijk onder jouw ernstige, ietwat strenge professorblik, maar gedreven als ik ben ging ik volledig op in mijn rol.
Hoe jij je voelde weet ik natuurlijk niet, maar voorzover ik kon waarnemen ging je ook serieus om met je rol. Het gesprek was in mijn herinnering uiterst kort en het precieze verloop weet ik ook niet meer, maar het resultaat staat me nog bij.
Na het gesprek ging de medewerker doen wat zijn chef graag wilde en zou een nieuw onderzoeksthema gaan starten.
Jouw reactie op dit resultaat staat mij nog helder voor de geest en ik zal proberen die te omschrijven.

Je ging rechtop zitten, legde met enige daadkracht je pen neer, keek mij aan en zei:
"Francien, hoe heb je dit nu in hemelsnaam voor elkaar gekregen, ik had mij zo voorgenomen op m'n standpunt te blijven staan."

Die oprechte en eerlijke reactie van jou is mij altijd bijgebleven, omdat je verbaasd was over het resultaat. Mijn alpha kwaliteit was wellicht te dominant, maar ik weet zeker dat bij een beta discussie het resultaat gegarandeerd omgekeerd zou zijn geweest.
Onze latere ontmoetingen in IR of anderszins hebben zich altijd gekenmerkt door samenspraak en daar heb ik goede herinneringen aan.
Hopelijk vindt je het ophalen van deze ongetwijfeld ver weggezakte herinnering een leuke bijdrage in dit boek, zelf schreef ik dit stukje met een glimlach.

Ik wens je het allerbeste en een heel goede 'pensioentijd' toe en hoop dat je volop zult genieten van alle goede dingen in het leven.

Francien Goudsbloem

De Noordzee

In 1979 trad de eerste auteur, Arnold Heemink, in dienst van de Rijkswaterstaat en startte daar een groot onderzoeksproject naar het verbeteren van de nauwkeurigheid van waterstands-voorspellingen in de Noordzee. Het wiskundige model dat destijds in gebruik was heette het "Timmerman-model", naar de onderzoeker die het bij het KNMI geïmplementeerd en getest had. Een lineair 2D model met een roosterafstand van 42 km en in het totaal enkele honderden roosterpunten. Om nog wat rekentijd te sparen was in het noordelijk deel van de Noordzee de roosterafstand in 1 richting vergroot tot 84 km. Bij navraag bleek dat het numerieke rekenhart was ontworpen door het Mathematische Centrum. Mijn speurtocht naar de wiskundige grondslagen van het model leidde vervolgens naar de bibliotheek van het MC en uiteindelijk naar het interne rapport "On the Stability of a Difference Scheme for the North Sea Problem" van Piet van der Houwen. Met veel moeite kon men voor mij nog een exemplaar van dit werk uit de catacomben van de MC bibliotheken opduiken. Wellicht een van Piets eerste publikaties. Dit was de eerste kennismaking van Arnold met zijn werk.
De tweede auteur, Theo van Stijn, ging in 1983 bij de Rijkswaterstaat werken waar hij zich verdiepte in de numerieke benadering van de advectie-diffusie vergelijking voor het transport van opgeloste stoffen in de Noordzee. Ook Theo maakte al spoedig kennis met werk van Piet van der Houwen, nl. een standaardwerk getiteld "Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems". Hierin wordt de constructie van algoritmen voor integratie in de tijdrichting in detail geanalyseerd, met de nadruk op de Runge-Kutta familie. Belangrijk was dat de theoretische uitwerking in combinatie werd gezien met de praktische toepassing ervan.

Onze persoonlijke kennismaking met Piet was ongeveer 10 jaar later. Wij namen toen als vertegenwoordigers van twee diensten van de Rijkswaterstaat zitting in de begeleidings-commissie van het promotieproject van Erik de Goede. Piet was hierbij de promotor van Erik. Het betrof (weer) het ontwikkelen van numerieke methoden ten behoeve van een ondiepwater model voor de Noordzee. Alleen nu 3D met 25 lagen, en met een horizontale roosterafstand van 16 km, en gebruik makend van een CRAY-MP2E supercomputer. Er was in 10 jaar toch wel het een en ander veranderd. Het project verliep prima en Erik promoveerde in 1992 op het proefschrift "Numerical Methods for 3D Shallow Water Equations on Supercomputers".

Na jarenlang bezig te zijn geweest met de waterbeweging, verschoof de aandacht naar transport. Eerst in het kader van het EU project NOWESP (NOrth West European Shelf Project), later in het kader van HPCN project TASC (Transport Algorithms in Scientific Computing). In beide gevallen betrof de toepassing weer het Noordzee probleem. Steeds stond Piet voor de inbreng van hem en zijn mensen. Ook bewandelde hij wegen buiten de gebaande paden en de gevestigde machtsblokken. Dat is door de Rijkswaterstaat zeer gewaardeerd.
Natuurlijk heeft Piet veel meer gedaan dan rekenmodellen ontwikkelen voor de Noordzee. Datzelfde geldt overigens ook voor ons. Toch hadden alle contacten tussen ons iets te maken met dit onderwerp. Wij denken met veel plezier terug aan de prettige samenwerking die we hebben gehad.

Arnold Heemink (TU Delft)
Theo van Stijn (Rijkswaterstaat/RIKZ)

Beste Piet,

Een stukje schrijven ter gelegenheid van jouw afscheid woelt een weemoedig gevoel bij me los, waar ik niet vaak last van heb. Het doet mij me realiseren dat we ruim dertig jaar naast en met elkaar gewerkt hebben.

In de begintijd was de werkwijze bij Het Centrum wel een heel andere dan nu. Toen ik in januari 1970 als part-time medewerker aangenomen werd, was het nog helemaal niet duidelijk wat ik zou gaan doen. Pas na enkele weken -toen ik door Dirk Dekker aan Van Wijngaarden werd voorgesteld- werd mij gevraagd wat ik van plan was te gaan onderzoeken. Nu wist ik toevallig van een cursus `Computational Methods in Biochemistry' die ik in 1968 in Schotland gevolgd had, dat `stijve differentiaalvergelijkingen' een hot topic was, zodat ik dat onderwerp voorstelde. Daarop hebben Van Wijngaarden, Dekker en jij toen besloten dat er een Werkgroep Stijve Differentiaalvergelijkingen zou komen. Die werkgroep heeft, onder jouw bezielende leiding, enkele jaren een bloeiend bestaan geleid, en in die tijd heb ik veel van je geleerd.

Toch hebben we nooit echt aan hetzelfde onderwerp gewerkt. Voor zover ik me herinner concentreerde jij je al snel op de Runge-Kutta methoden, terwijl ik me meer met de meerstapsmethoden bezighield, en toen je in 1973 chef van de afdeling Numerieke

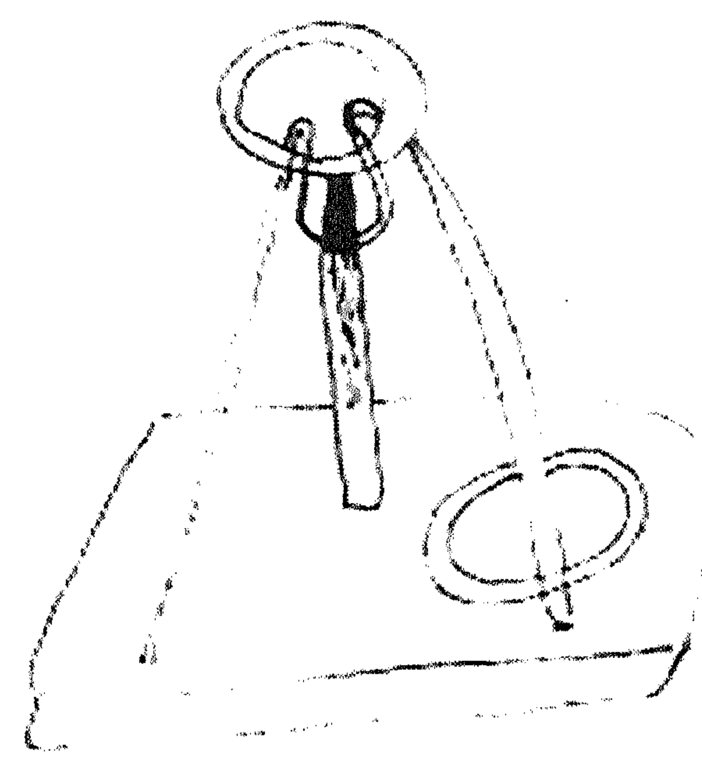
Wiskunde werd, werd het onderzoek aan de differentiaalvergelijkingen al direct opgedeeld in 'beginwaardeproblemen' en 'randwaardeproblemen'. Langs die lijnen hebben we lange tijd ons onderzoek gedaan, waarbij jouw interesse voor wat er bij de 'randwaardeproblemen' gebeurde altijd heel inspirerend was. In het bijzonder leidden jouw aansporingen er toe dat ik na enige tijd promoveerde.

Ik heb jouw interesse en medewerking altijd erg gewaardeerd en ik wil ook hier mijn bewondering uitspreken voor de manier waarop je, ruim 25 jaar, leiding hebt gegeven aan de afdeling Numerieke Wiskunde. Je hebt er altijd voor kunnen zorgen dat er een uitstekende sfeer heerste, waar in de eerste plaats de kwaliteit van het geleverde werk op de voorgrond stond. Al eens eerder heb ik gezegd dat we jouw leiding kunnen karakteriseren met de woorden : Behoedzaam, Zakelijk en Zorgvuldig. Dat je daarmee een uitstekende omgeving wist te scheppen, waarin iedereen tot zijn recht kon komen en waarin het prettig werken was, is iets waarvoor we je allemaal dankbaar kunnen zijn.

Ik wil niet alle dertig jaar de revue laten passeren. Dat zou veel ruimte vergen. Ik wil daarvoor een paar passende woorden anhalen uit de persoonlijke aantekeningen van Marcus Aurelius ie bewaard zijn gebleven. (Inderdaad, de Romeinse keizer, 161 180. Je kent mijn voorliefde voor klassieke schrijvers.) Παν το και ὁπωσουν καλον ἐξ ἑαυτου καλον ἐστι, και ἐφ' ἑαυτο καταληγει, οὐκ, ἐχον μερος ἑαυτου τον ἐπαινον. οὐτε γουν χειρον ἠ κρειττον γινεται το ἐπαινουμενον. τουτο φημι και ἐπι των κοινοτερον καλων λεγομενων· οἱον ἐπι των ὑλικων και ἐπι των τεχνικων κατασκευασματων· το γε δη ὀντως καλον τινος χρειαν ἐχει; οὐ μαλλον ἠ νομος, οὐ μαλλον ἠ ἀληθεια, οὐ μαλλον ἠ εὐνοια, ἠ αἰδως. (IV, 20)

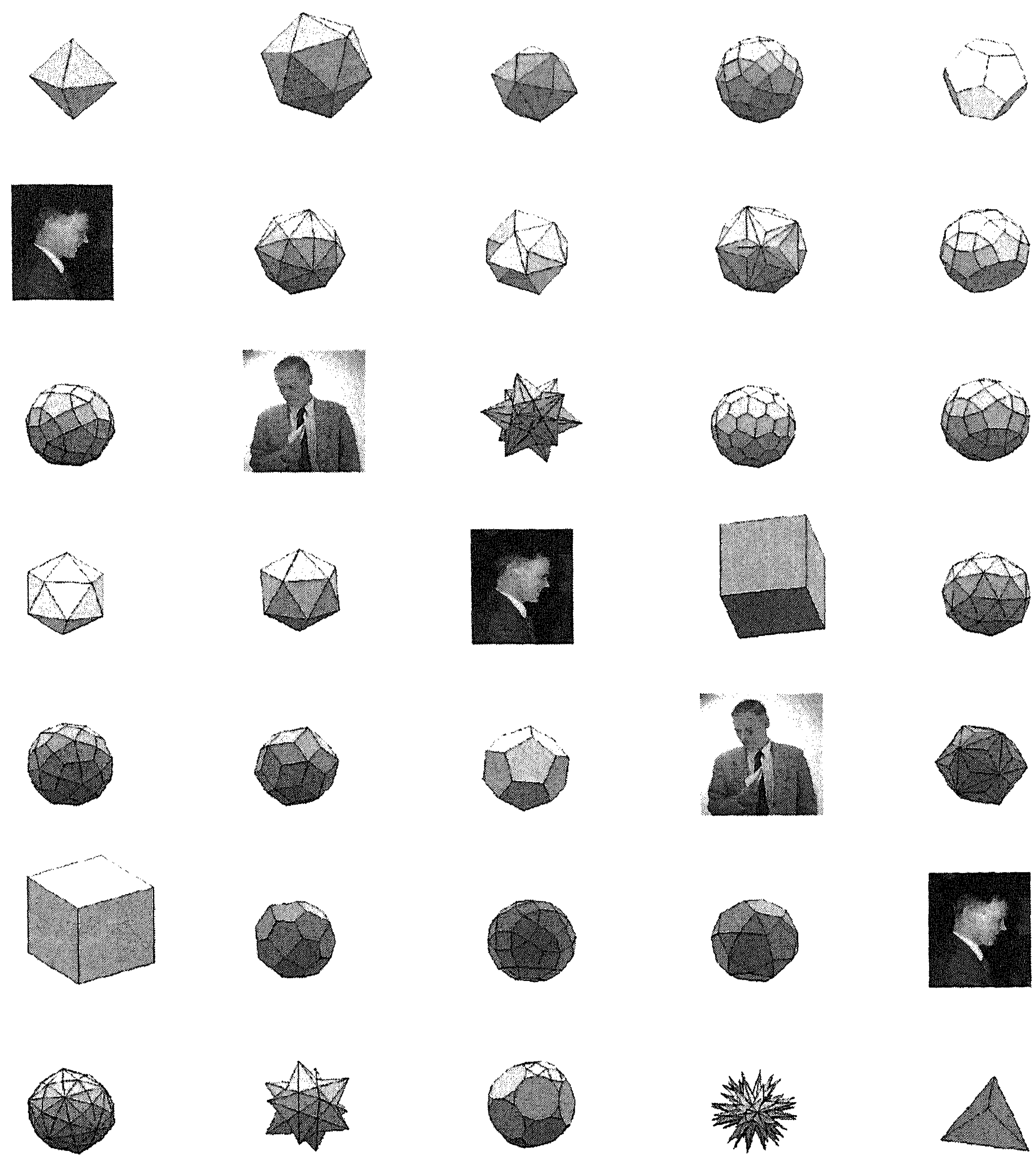
Ook de volgende overpeinzing vond ik de moeite waard : συνεχως ἐφισταναι, τινες εἰσιν οὑτοι, ὑφ' ὡν μαρτυρεισθαι θελεις, και τινα ἡγεμονικα ἐχουσιν. οὐτε γαρ μεμψῃ τοισ ἀκουσιως πταιουσιν, οὐτε ἐπιμαρτυρησεως δεησῃ, ἐμβλεπων εἰς τας πηγας τησ ὑποληψεως και ὁρμης αὐτων. (VII, 62) Met ons roestig school-Grieks, een woordenboek en -vooral- een vertaling, is daar aardig uit te komen. (Ik geef geen vertaling omdat voor een goed begrip de regels eigenlijk wat meer achtergrondkennis nodig hebben.)

Met het ontcijferen van deze tekst heb ik je dan meteen een kleine puzzle opgegeven. Weliswaar is het geen schaakpuzzle, jouw specialiteit, maar een ander soort waar je misschien ook plezier aan beleeft. Ikzelf breek me nog steeds het hoofd over de puzzle die je me laatst gaf. Ik zou je graag hier de oplossing gegeven hebben, maar ik heb hem nog niet opgelost :

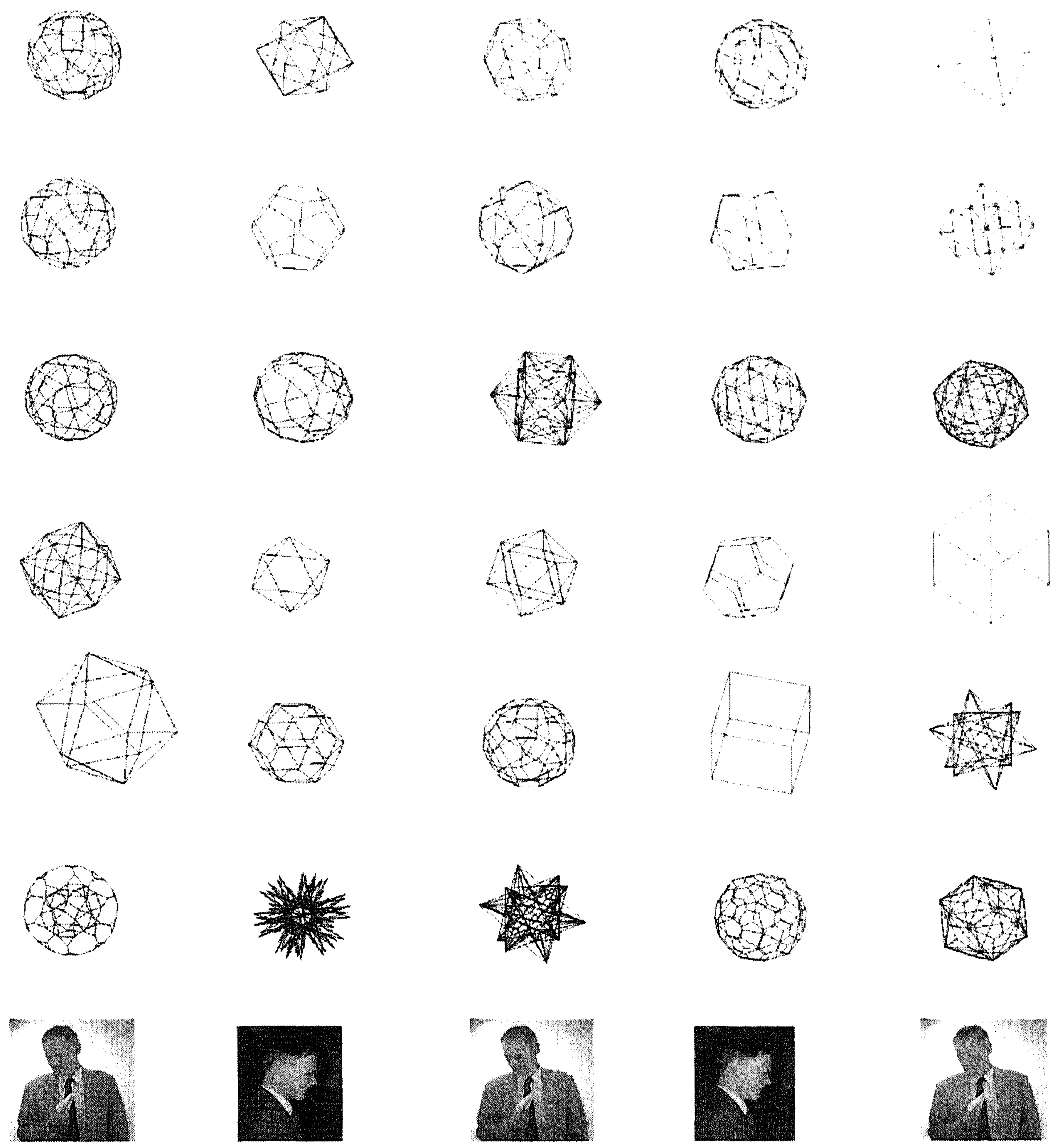


Een tweede puzzle die ik je wil aanbieden, is een eenvoudig zoekplaatje : vind de juiste namen en draadfiguren bij de gegeven ruimtefiguren. Dat is natuurlijk een fluitje van een cent, maar het geeft me de gelegenheid er zulke aardige figuren bij te tekenen.

Tot slot heb ik voor jou en Aly een recept gemaakt voor een type klassieke pudding, die jullie hopelijk waarderen. Wij vonden het in ieder geval leuk om hem te maken, en plezierig om op te eten.



Dodecahedron (2), Hexahedron (2), Icosahedron (2), Echidnahedron, Octahedron, Octahemioctahedron, Tetrahedron, TrigyrateRhombicosidodecahedron, TriakisIcosahedron, TrapezoidalHexecontahedron, TetrakisHexahedron, SmallStellatedDodecahedron, RhombicTriacontahedron, PentakisDodecahedron, PentagonalOrthobirotunda, PentagonalIcositetrahedron,



PentagonalHexecontahedron, ParagyrateDiminishedRhombicosidodecahedron, ParabigyrateRhombicosidodecahedron, ParabiaugmentedTruncatedDodecahedron, MetabigyrateRhombicosidodecahedron, HexakisOctahedron, HexakisIcosahedron, GyroelongatedPentagonalPyramid, GyrateRhombicosidodecahedron, GreatIcosahedron, GreatDodecahedron.

Bavaroise Caramel

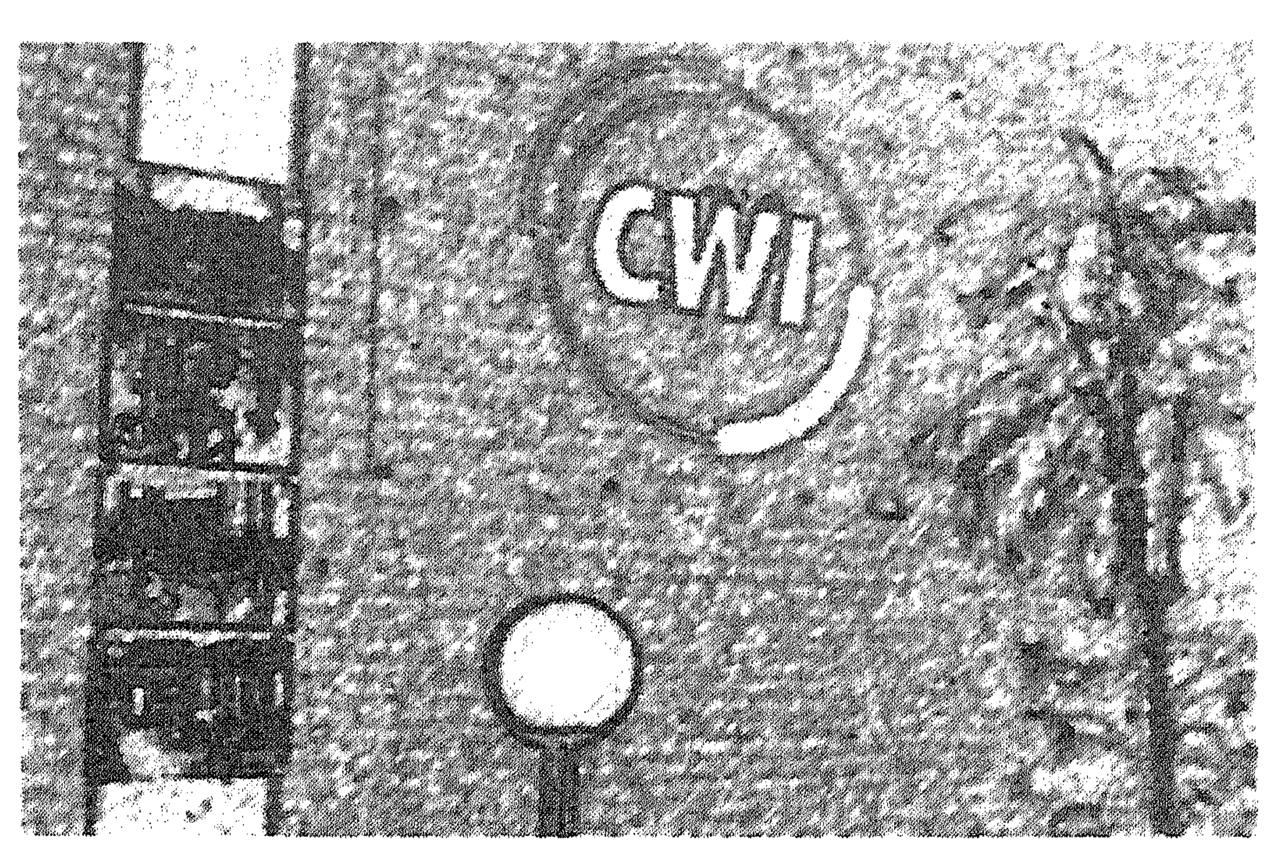
INGREDIENTEN:

120 gr suiker
80 gr rozijnen
1/4 L slagroom
4 blaadjes gelatine
1 pakje vanillesuiker
1 borrelglaasje marasquin (bijv. Wolfberger, Liqueur d'Alsace Marasquin)

BEREIDING:

1. Was de rozijnen, droog ze af en leg ze in de marasquin.
2. Week de blaadjes gelatine in ruim koud water.
3. Carameliseer 80 gr suiker (in een oud steelpannetje) tot ze een goede donkerbruine kleur heeft.
4. Los zoveel mogelijk caramel op in een deciliter kokend water. Haal de oplossing van het vuur, koel het enigszins af en los de uitgeknepen gelatine erin op. Koel het mengsel volledig af in een bak koud water en laat het daarna ongeveer 30 minuten staan.
5. Sla de (koude) slagroom stijf met de overgebleven suiker en de vanillesuiker.
6. Giet de marasquin met rozijnen in de carameloplosing, en schep daarna dit alles door de geklopte slagroom, zodat een homogeen mengsel ontstaat. (Het geheel stijft tijdens het roeren langzaam op, zodat de rozijnen gelijkmatig verdeeld kunnen worden.)
7. Vul met het mengsel een vorm. Als je de pudding wilt lossen, kun je beste een metalen vorm nemen, zodat je -in een bad heet water- de buitenkant van de pudding een weinig kunt smelten.

Piet Hemker



Herinneringen aan een reis naar Bombay

Beste Piet,

Sedert het begin van de jaren zeventig hadden wij in wisselende mate van intensiteit met elkaar te maken; het begon dat jij op het Mathematisch Centrum gedurende een korte periode mijn chef was, totdat ik mijn fifty-fifty UvA/MC aanstelling inruilde voor een 100% UvA aanstelling. Toen jij buitengewoon (of heette dat bijzonder?) hoogleraar aan onze Universiteit werd, kregen wij binnen de toenmalige vakgroep Informatica en Numerieke Wiskunde weer met elkaar te maken.

In latere jaren, nadat de race voor het binnenhalen van externe financiering goed op gang was gekomen, betrok jij me bij een aantal STW projecten en ik denk met veel plezier terug aan de bijeenkomsten die we met regelmaat bij jou op de kamer hadden.

Ons nauwste contact stamt uit januari 1992; in die tijd hebben we samen een werkbezoek aan Bombay gebracht en bij de gelegenheid van jouw afscheid wil ik daarover graag nog enige herinneringen op papier zetten.

Medio januari 1992 werd aan het "Bhabha Atomic Center" (BAC), in Bombay, een conferentie gehouden over het thema "AI applications in Physical Sciences" en de organisator van die conferentie wilde kennelijk zijn status wat verhogen door het uitnodigen van enige buitenlandse gastsprekers. Of het onderzoeksgebied van de uit te nodigen sprekers wel voldoende aansloot bij het onderwerp van de conferentie, leek hem klaarblijkelijk van ondergeschikt belang.

Onze eigen motivatie om daar naar toe te gaan, was om zo mogelijk in contact te komen met geschikte kandidaten voor promotieonderzoek in onze groep.

We reisden met Swissair in een DC-10 via Zürich naar Bombay waar we midden in de nacht plaatselijke tijd (eigenlijk was het al vroeg in de ochtend) met een jeep werden afgehaald door twee medewerkers van het BAC. Onze tocht vanaf het vliegveld bracht ons door een gebied met veel onverharde wegen waar de mensen – veel mensen, er wonen er zo'n 10 miljoen in Bombay – onder golfplaten huisden. Ik weet niet hoe het jou verging, maar deze eerste kennismaking met India maakte op mij meteen al veel indruk.

Het BAC bevond zich in een zeer groot omheind gebied, waar ook een hele woonwijk voor werknemers was. Binnen dat gebied was een afgeschermd terrein voor de laboratoria en instituten. Om daar te kunnen komen moest je langs bewapende schildwachten die je om je legitimatie vroegen als ze je niet kenden. Meenemen van fotoapparatuur was streng verboden en ook anderszins hielden de wachters zich het recht voor om te bepalen wat je wel en niet mee naar binnen mocht nemen.

Toen we de eerste nacht eindelijk bij ons onderkomen aankwamen, kreeg ik niet echt de indruk dat er bij de receptie op ons gerekend was, maar het gastenverblijf waar we afgeleverd waren, was zo groot dat we ons daar geen zorgen over hoefden te maken.

Toch wist de dienstdoende klerk niet goed raad met ons en hij verwees ons samen naar een tweepersoonskamer; dat werd voor die nacht dus inderdaad een nauw contact! Van slapen kwam echter niet zo veel; de kamer was nogal warm en er waren veel muggen. De bestrijding daarvan gebeurde met zo'n ouderwetse flitsspuit die een geur verspreide waarvan ik niet meer wist dat ik hem nog kende.

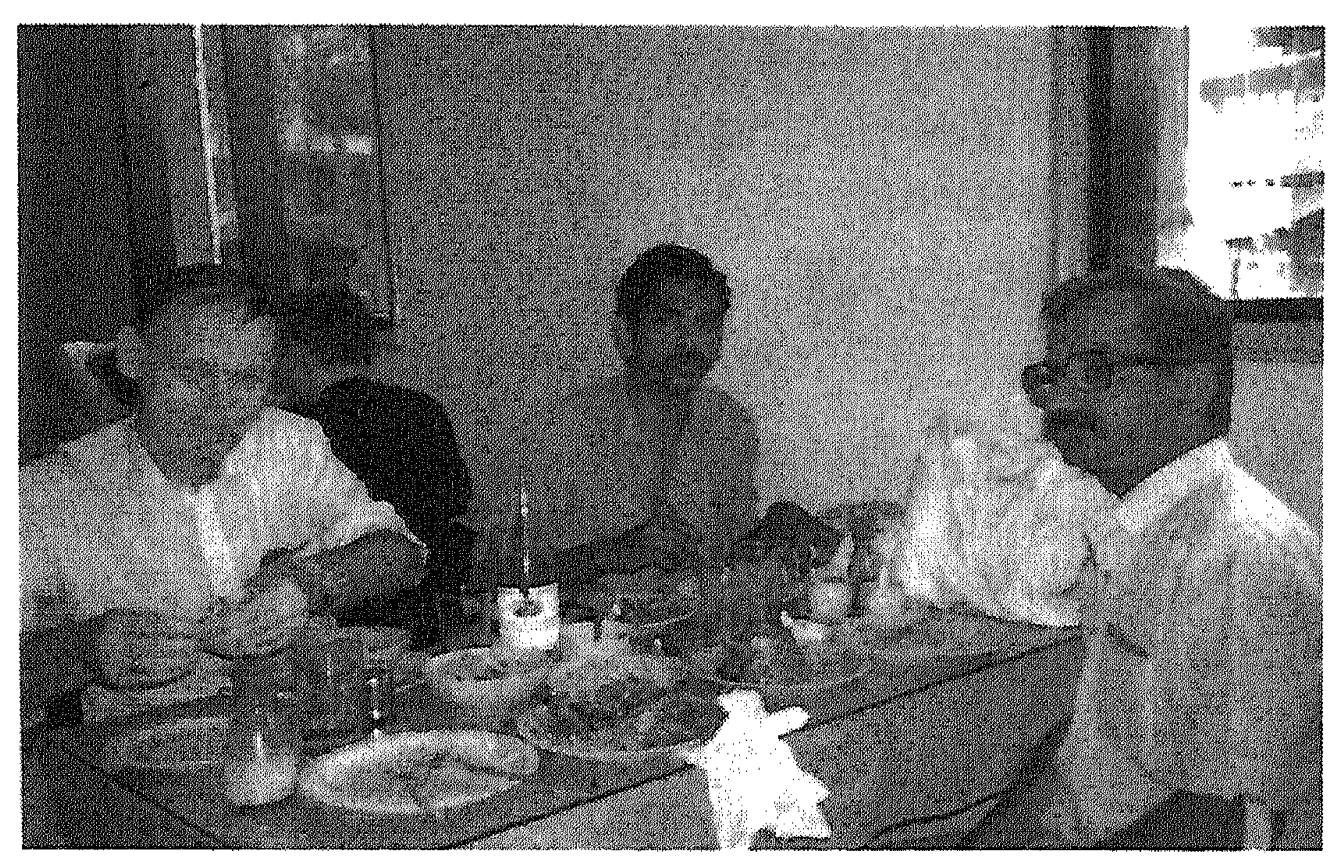
Op wetenschappelijk gebied hadden we met de andere bezoekers van de conferentie niet zo veel gemeen; een uitzondering hierop vormde Dr G. S. Singh. Hij was een onderzoeker van het BAC die het jaar daarvoor nog in Nederland was geweest en daar ook een voordracht op het CWI had gehouden.

Een van de eerste avonden (op 14 januari) nodigde hij ons uit voor en bezoek bij hem thuis. Zijn vrouw had heerlijke vegetarische hapjes oor ons gefrituurd en was daar tijdens ons bezoek ook nog druk mee ezig. En je herinnert je vast nog wel met hoeveel vaderlijke trots Singh zijn dochter en zoon – maar vooral toch zijn zoon – aan ons voorstelde.

Hij besprak toen met ons de gevaren die hem misschien te wachten stonden als hij zou ingaan op het aanbod om hoogleraar te worden aan een universiteit in de Punjab. In die periode liep daar de spanning tussen de bevolkingsgroepen al weer aardig op.

Een andere gebeurtenis was die keer dat we mee op pad werden genomen voor een bezoek aan downtown Bombay. Onze gids deed erg zijn best om het ons naar de zin te maken, maar de herinnering aan die tocht wordt toch voornamelijk bepaald door het stuurse optreden van de chauffeur die misschien liever wat anders had willen doen dan twee Europeanen door Bombay rijden. Met frisse tegenzin werden we langs diverse bezienswaardigheden geleid. Ik herinner me het spoorweg station in Victoriaanse bouwstijl en ook de boulevard aan de zuidkust van Bombay, met mooie statige huizen.

Vanaf de uiterste zuidpunt, op Malabar Hill, hadden we een prachtig zicht op wat men 'the Queen's necklace' noemt en die gevormd wordt door de huizen langs de gebogen boulevard. Er was daar ook een park met exotisch geknipte buxus struiken en loslopende pauwen; ik heb daar nog een waaier van pauwenveren gekocht. Onderweg hebben we gegeten, ergens in de buurt van 'the gateway to India', een gigantische poort die aan de waterkant staat te pronken (maar die de Indiërs alleen maar herinnert aan de tijd van de overheersing door de Engelsen).



Ten tijde van de conferentie was er ook een of andere cursus met deelnemers uit 'naburige' Aziatische landen. De organisator had voor zijn cursisten op zondag een uitstapje gepland naar Elephanta, een eiland in de baai van Bombay. Op dit eiland is een grot waarin beelden zijn uitgehakt ter ere van Shiva. Wij werden uitgenodigd om mee te gaan. Natuurlijk deden we dat graag en nu ik dit schrijf denk ik weer terug aan hoe we moesten overstappen van de boot die ons naar het eiland bracht op een vaartuig met wat geringere diepgang dat ons daadwerkelijk aan land kon brengen.

Elephanta is een geliefd doel voor uitstapjes en het was ook die zondag aardig druk, althans volgens Nederlandse maatstaven... . De grot was voornamelijk geheimzinnig en donker, en de beelden waren zonder extra licht nauwelijks te onderscheiden, maar de hele sfeer maakte toch wel indruk.

Later op de dag zijn we naar een aan Lakshmi gewijde Hindoe tempel geweest. We moesten onze schoenen uittrekken. Die kwamen met tientallen andere schoenen op een grote hoop te liggen. Ik heb me nog een moment afgevraagd of ik ze wel weer zou kunnen terug vinden. Onze gids, de cursusleider, bracht een traditioneel offer bestaande uit bloemen, fruit en wat eetbare zaken mooi opgemaakt op een schaal.

We hebben daar in de buurt enige souvenirs gekocht bij wat winkeltjes die ons wel aanstonden omdat ze er niet naar uitzagen dat ze er speciaal voor de touristen waren.

Inmiddels was het donker geworden en ondanks het gevorderde uur zagen we op de terugweg weer die onafzienbare rijen lopende mensen die net als 's ochtends langs de ene kant van de weg de stad in liepen en langs de andere kant in even grote aantallen de stad uit. Het maakte een indruk van tijdloosheid, alsof enige weersgesteldheid en enig jaargetijde er volstrekt niet op van invloed waren; alsof het nooit tot stilstand zou komen.

Amsterdam, juli 2000 Walter Hoffmann

De numerieke sectie

Jan Kok

XXV - VII @ MM

Op de dag dat ik met Piet van der Houwen kennismaakte en ook voor het eerst in mijn leven het Mathematisch Centrum betrad stonden de aandelen MicroSoft op oneindig. Ik was op een warme februaridag in 1969 van Uilenstede naar de Tweede Boerhaavestraat gefietst, twee weken na mijn doctoraal examen. De Rekenafdeling (RA) zocht een wiskundig medewerker, zo had ik in de Mededelingen van het WG gelezen, en op mijn telefonisch gestelde vraag naar de inhoud van de functie had ik als reactie gekregen: "Kom maar praten".

Het kenmerkte evenzeer het *low profile* van het MC als mijn eigen wijze van studeren, denk ik, dat ik tot dan toe contact met het MC zonder moeite had weten te vermijden. Later, toen ik erop ging letten natuurlijk, bleek me dat er mensen waren die wel de weg gevonden hadden, en die zodoende tijdig profiteerden van de achter die onopvallende voordeur opgeslagen schatten.

Ik werd hartelijk ontvangen door receptioniste Suze, en doorgestuurd naar mevrouw Reckman. Mijn belangstelling voor de open functie wenste men als een sollicitatie op te vatten, en daarom kreeg ik gesprekken te voeren met de twee souschefs van de RA: met Piet, die waarnemend souschef was van **de numerieke sectie** en met professor F.E.J. Kruseman Aretz, die souschef van de **programmeersectie** was.

Van deze gesprekken herinner ik me weinig, maar dat ik nog niet eerder op het MC op bezoek was geweest heeft blijkbaar niet in mijn nadeel geteld. Mogelijk heeft in mijn voordeel gewerkt dat ik wel eens bij Electrologica op excursie was geweest. Van Piet herinner ik me één ongewone vraag, maar ik mag natuurlijk hier niet Piets interviewtechnieken onthullen dus die vraag blijft geheim. Mijn antwoord mag ik wel geven: "PvdA".

Maandag 3 maart was mijn eerste MC-werkdag. Ik kreeg het gebouw te zien, met de meest verrassende hoekjes; tot en met een verborgen kamer, aan het eind van een gang achter een deur en dan nog een gordijn en op de grond opgestapelde gebonden tijdschriften. In die praktisch ongestoffeerde kamer hadden zich Carla Smit en Hèrl Roos Lindgreen geïnstalleerd; de ruimte is kort daarna door de bibliotheek veroverd. In een gang kwamen we Chester tegen, die mij onmiddellijk herkende van het Lyceum tien jaar eerder. Daarna kreeg ik in de RA-assistentenkamer een van de tien bureaus en begon een eindeloze en eindeloos interessante leertijd, te beginnen met programmeren, Algol 60 en in theorie ook Algol 68, en natuurlijk flexowriterbanden ponsen, plakken, gaatjes bijprikken, banden oprollen en daarbij breken, en weer repareren.

Ik had al gauw een opdracht om de oplossing van het lineaire kleinste-kwadratenprobleem nauwkeuriger te berekenen (nutteloos, naar ik nu inzie, maar een aardige oefening). Daarmee als voldoende ingewerkt beschouwd werd ik op een dag door Piet bij een gesprek gehaald dat hij met twee bezoekende natuurkundigen van het IKO had. Later werd me duidelijk dat het ook kennissen van Piet waren, anno 2000 zouden we in zo'n geval van *netwerk* spreken. Ik werd ingeschakeld om het uit een curve-fitting-probleem herleide nietlineaire kleinste-kwadratenprobleem numeriek op te lossen. Uit een door de bezoekers meegebracht natuurkunderapport haalden we een Newton-achtige methode die ik ging implementeren; de methode noemde we 'gedempte Newton', maar later bleek het om niets anders dan Newton-Raphson te gaan.

Piet zag meer mogelijkheden nu een dergelijke implementatie beschikbaar was. Na Dirk Dekkers terugkeer (uit Amerika) op de stoel van souschef van de numerieke sectie was Piet teruggegaan naar Toegepaste Wiskunde, waar hij na korte tijd in het kader van een stoelendans Van de Riet als souschef opvolgde, die zelf Kruseman Aretz (naar de TH Eindhoven vertrokken) als souschef van de programmeersectie opvolgde. Ongeacht in welke afdeling werkte Piet aan het gebruik van Runge-Kutta-methoden in het oplossen van partiële differentiaalvergelijkingen. Ik citeer uit Jaarverslag 1969:

> Hierbij bleek het wenselijk deze methoden te "stabiliseren" om tot aanvaardbare differentieschema's te komen. Dit leidde tot de definitie van een klasse van polynomen die in een zekere zin optimaal zijn. Een aantal polynomen uit deze klasse werd geconstrueerd.

Zoals Piet zelf in het Vriendenboek voor Frans Kruseman Aretz uit de doeken heeft gedaan kreeg hij ook van veel kanten tips bij zijn onderzoek om een groep van stabiliteitspolynomen analytisch te vinden. Het duidt een voordeel van de mogelijkheden die het bijeenbrengen van veel getalenteerde mensen in het MC toen bood.

Waar de analyse niet verder kwam werd de numerieke wiskunde ingeschakeld. Om een stabiliteitsgebied met een zo groot mogelijk interval $(-\beta, 0)$ van de negatieve reële as in het complexe vlak te krijgen waren polynomen nodig met bepaalde *minimax* eigenschappen. Voor de *eerste orde* waren deze polynomen analytisch bekend (Chebyshev-polynomen).

Met de door mij geïmplementeerde gedempte-Newton-algoritme werden nu een aantal polynomen van hogere orde numeriek bepaald. De coëfficiënten werden gepubliceerd in TW123/71, een rapport met de verhullende titel *Numerical solution of a minimax problem*. En omdat ik over de nauwkeurigheid van de gevonden getallen weinig wilde loslaten (m.a.w. ik wist het niet) zijn de berekeningen later door Kees Dekker herhaald.

Piet bleef zoeken naar *analytische* uitdrukkingen voor de (zoals ze volgens mij dienen te heten) **Van der Houwen-polynomen**; zelf heeft Piet al eens een deelklasse *Bakkerpolynomen* gedoopt). Inmiddels weer (op 1 april 1972) mijn souschef geworden, de onderafdeling van de RA heette intussen *sectie Numerieke Wiskunde*, wees hij me er weldra op dat het minimax-probleem toch een boeiende wiskundige uitdaging was en dat vond ik ook, maar hoewel ik er vaak aan begonnen ben (Piet heeft het probleem ook eenmaal als prijsvraag van het WG gesteld) ben ik er nooit uitgekomen. Ik denk dat Piet blijft doorzoeken.

Ik heb me willen beperken tot herinneringen ophalen aan mijn eerste jaar op het MC. Van latere jaren weten veel collega's uit eigen herinnering al voldoende. De onbenutte ruimte op deze bladzijde gebruik ik om een van mijn Trijntje Fop-imitaties in druk te laten verschijnen. Ik ben ijdel genoeg om hiervoor het vers dat ik ter gelegenheid van de opheffing van de *afdeling* Numerieke Wiskunde maakte te kiezen, het is een van de geslaagdere (vind ik) omdat ik me goed aan de Fop-voorschriften heb gehouden. De première vond plaats twee dagen na de (voorlopig) laatste Elfstedentocht, en het resultaat werd aan Piet (de enige chef die NW heeft gekend) aangeboden.

Op een ijsvogel

Runge noch Kutta heeft vermoed
dat door een ijsvogel uit Groet
een Fries circuit van ondiep water
geïntegreerd werd. Hij sprak later:
"IJstransplantatie op mijn vijver
maakte de vergelijking stijver."

Jan Kok
VI - I - MCMXCVII

Wiskunde en Fictie: enige voorbeelden en kanttekeningen

Tom Koornwinder

aan Piet van der Houwen bij zijn afscheid van CWI en UvA

Toen ik zo'n vier jaar geleden met een eigen homepage [1] begon vond ik het wel aardig om er nog iets aparts op te zetten, naast de gebruikelijke zaken waarmee een professioneel wiskundige zich presenteert. Ik startte een subrubriek *Mathematics in fiction* [2]. Herlezing van *Gulliver's travels* [3] van Jonathan Swift had me op het idee gebracht. Ik had nu niet alleen de eerste twee episodes gelezen, met reizen naar het land van de Lilliputters en het land Brobdingnag van de reuzen, maar ook de versalgen van de andere twee reizen, naar het land Laputa en naar het land van de Houyhnhnms (een paardenvolk). Deze twee episodes zijn eigenlijk nog veel beter en hilarischer dan de overbekende eerste twee, ofschoon ze kinderen minder zullen aanspreken.

In het verhaal van Gulliver's bezoek aan Laputa maakt Swift de wiskundigen als beroepsgroep volledig belachelijk. Laputa is een in de lucht zwevend eiland, een soort vliegende schotel. De koning en zijn medewerkers heersen van hieruit over het eiland Balnibarni met hoofdstad Lagado, zonder ooit omlaag te komen. In Laputa dient men zich te gedragen volgens strenge normen ontleend aan de muziek en de wiskunde. Het leven wordt er wel erg saai en eenzijdig door. Toen Gulliver op audiëntie bij de koning ging was deze diep verzonken in een wiskundig probleem:

> *His Majesty took not the least notice of us, although our entrance was not without sufficient noise, by the concourse of all persons belonging to the court. But he was then deep in a problem, and we attended at least an hour, before he could solve it. There stood by him on each side a young page, with flaps in their hands, and when they saw he was at leisure, one of them gently struck his mouth, and the other his right ear; at which he started like one awakened on the sudden, and looking towards me and the company I was in, recollected the occasion of our coming, whereof he had been informed before.*

De vrouwen van Laputa snakken naar afleiding. Deze wordt vooral geboden door (mannelijke) bezoekers uit Balnibarni:

> *Among these the ladies choose their gallants: but the vexation is, that they act with too much ease and security, for the husband is always so rapt in speculation, that the mistress and lover may proceed to the greatest familiarities before his face, if he be but provided with paper and implements, and without his flapper at his side.*

Na twee maanden had Gulliver er wel genoeg van. Hij kreeg toestemming om neer te dalen. Daar bezocht hij de academie van Lagado waartoe ondermeer een wiskunde-school behoorde. Daar had men een bijzondere manier van onderwijs ontwikkeld:

> *The proposition and demonstration were fairly written on a thin wafer, with ink composed of a cephalic tincture. This the student was to swallow upon a fasting stomach, and for three days following eat nothing but bread and water. As the wafer digested, the tincture mounted to his brain, bearing the proposition along with it.*

Deze en andere citaten uit Gulliver's travels vormden het begin [4] van mijn webpage *mathematics in fiction*.

Een tweede boek dat ik hierin aanroerde was *Oorlog en vrede* [5] van Lev Tolstoj. Deze roman, volgens sommigen de mooiste roman die ooit geschreven is, las ik pas een paar jaar geleden, waarna ik geneigd ben om dit waarde-oordeel te beamen. Een betrekkelijk ondergeschikt aspect van dit zeer rijke boek, hoewel voor Tolstoj misschien toch wel heel essentieel, is het voorstel om geschiedenis te verklaren zoals de dynamica van systemen van deeltjes onder invloed van krachten verklaard kan worden met behulp van de infinitesimaalrekening. Tolstoj wilde dit in het bijzonder op het verloop van veldslagen toepassen. Een aantal relevante citaten [6] uit *Oorlog en vrede* verzamelde ik op mijn webpage. Een dergelijke aanpak tot de geschiedwetenschap schijnt nooit serieus besproken te zijn in kringen van professionele historici. Toch heeft Tolstoj's infinitesimaalrekening van de geschiedenis recentelijk nog wat aandacht gekregen in de dissertatie van Eelco Runia [7] en in een essay van Paul Vitányi [8].

Veel verder kwam ik niet met mijn ambitieuze plannen voor deze website. Gelukkig bracht een book review door Alex Kasman [9] mij in kennis met zijn website *Mathematical fiction* [10] waarin hij 164 items (boeken, toneelstukken, films en TV-programma's) bespreekt. Het blijkt dat fictie-schrijvers van oudsher geïntrigeerd zijn door de wiskunde als wetenschap en door de wiskundige als persoon en als type. Voor de professionele wiskundige is het interessant om hiervan kennis te nemen, omdat het leuk is om jezelf en je vak in de spiegel te zien, maar ook omdat het ons een zorg moet zijn hoe wij bij een breed publiek overkomen. Dit kan immers weer positieve of negatieve effecten hebben op het aantal eerstejaars wiskunde en op de financiering van ons onderzoek.

In de boven aangehaalde voorbeelden van "Gulliver's reizen" en "Oorlog en vrede" zagen we twee verschillende manieren van behandeling van wiskunde in de fictie. De wiskundige als type, vaak karikaturaal gebracht, figureerde bij Jonathan Swift, terwijl Tolstoj de wiskunde verwerkte in een wetenschappelijk-filosofische beschouwing terzijde van de hoofdlijn van zijn verhaal. Een derde manier is dat een wiskundig soort modellering gebruikt wordt in het door de auteur beschrevene. De wiskunde hoeft daar niet expliciet genoemd te worden, maar zal door de wiskundige herkend worden. Mijn favoriete schrijver in dit verband is Italo Calvino [11] (Italië, 1923–1985). In het bijzonder vermeld ik hierbij zijn boek *De onzichtbare steden* [12]. Ik parafraseer nu een bespreking die ik aan dit boek wijdde in een nummer van *MC-papier* ergens in de jaren tachtig.

Het boek *De onzichtbare steden* bestaat uit een groot aantal korte, in de mond van Marco Polo gelegde beschrijvingen van steden met fantasienamen als Zora, Aglaura, Trude, afgewisseld door bespiegelende gesprekken tussen Kublai Kan, heerser over alle Tartaren, en zijn bereisde Venetiaanse vertrouweling Marco Polo.

Steden zijn een van de meest opmerkelijke voortbrengselen van menselijke cultuur. Zij zijn zeer complex en kunnen zich in vele gedaantes aan ons voordoen. Een gegeven stad kan op eindeloos veel manieren beschreven worden, afhankelijk van het aspect dat men wil beschouwen, en door geen beschrijving zal de stad volledig worden vastgelegd; misschien zal zij je juist verder ontglippen hoe meer je haar beschrijft. De 55 stedenbeschrijvingen uit het boek houden zich elk met zo'n aspect bezig, terwijl bovengenoemde paradoxale kant van het beschrijven in menig stuk aan de orde komt. In feite vindt men hier allerlei fundamentele problemen uit de grondslagen van de wis- en natuurkunde terug, terwijl wiskundige begrippen als relaties, afbeeldingen en meetkundige structuren ook in menig fragment impliciet een rol spelen. Laat ik wat voorbeelden geven.

Allereerst over de onmogelijkheid van exacte beschrijving. Zora (zie *De steden en de herinnering. 4*) is een stad die je als je haar eenmaal gezien hebt niet meer kunt vergeten:

> *Zora heeft de eigenschap dat ze punt voor punt in je herinnering achterblijft: de opeenvolging van de straten, en van de huizen in de straten, en van de deuren en ramen van die huizen, ook al zijn die niet van een buitengewone schoonheid of zeldzaamheid. ··· De mens die uit zijn hoofd weet hoe Zora in elkaar zit, stelt zich 's nachts als hij niet kan slapen voor dat hij door de straten loopt en herinnert zich de volgorde der dingen: het koperen uurwerk, het gestreepte scherm van de barbier, de fontijn met de negen waterstralen, de glazen toren van de astronoom, het stalletje van de watermeloenverkoper, het standbeeld van de heremiet en van de leeuw, het Turkse bad, het café op de hoek, de dwarsstraat naar de haven. Deze stad die niet uit je hoofd verdwijnt is als een metalen constructie of een netwerk met vakjes waarin iedereen die dingen kan rangschikken die hij wil onthouden: namen van beroemde mannen, deugden, getallen, classificaties van planten en mineralen, data van veldslagen, sterrenstanden, flarden van een gesprek. Tussen elk begrip en elk punt van de afgelegde weg zal hij een verband kunnen leggen dat duidt op affiniteit of contrast en dat onmiddellijk een herinnering oproept. Zodat de wijsten diegenen zijn die Zora uit hun hoofd kennen.*
>
> *Maar ik ben voor niets op reis gegaan om de stad te bezoeken: verplicht onbeweeglijk en gelijk aan zichzelf te blijven om beter in de herinnering te kunnen achterblijven, kwijnde Zora weg, ging het tot ontbinding over en verdween. De aarde is haar vergeten.*

Een ander voorbeeld is Olivia (zie *De steden en de tekens. 5*):

> *Niemand weet beter dan jij, wijze Kublai, dat je nooit een stad mag verwarren met de woorden die haar beschrijven. En toch is er een verband tussen het een en het ander. Als ik je Olivia beschrijf, een stad rijk aan produkten en inkomsten, dan heb ik, om je een idee te geven van haar welvaart, geen ander middel ter beschiking dan te praten over filigrain-paleizen met kussens vol franjes op de vensterbanken van de biforen; achter het hekwerk van een patio besproeien de waterstralen van een draaiende fontein een gazon waar een witte pauw op staat te pronken. Maar uit deze woorden begrijp jij meteen hoe Olivia gehuld is in een smerige roetwolk die zich vasthecht aan de muren van de huizen; dat in het gedrang op straat voetgangers verpletterd worden tegen de muren door manoeuvrerende vrachtwagens. ··· Dit weet je misschien niet: dat ik om over Olivia te vertellen geen andere woorden zou kunnen kiezen. Als er werkelijk een Olivia bestond met biforen en pauwen, met zadelmakers en tapijtknopers, dan zou het een ellendig gat zijn, zwart van de vliegen, en om het je te beschrijven zou ik mijn toevlucht moeten nemen tot metaforen die spreken van roet, het geknars van wielen, herhaalde gebaren, sarcastische opmerkingen. De leugen ligt niet in het verhaal, zij ligt in de dingen.*

Zo zou ik nog lang door kunnen gaan met opmerkelijke steden uit het boek, zoals Ersilia waar draden van verschillende kleur tussen de huizen de diverse relaties aangeven totdat er zoveel draden zijn dat je er niet meer tussendoor kunt, dan wordt de stad afgebroken maar de draden blijven; of de stad Armilla waarvan alleen nog het skelet van de waterleidingbuizen is overgebleven en je vaak nog jonge slanke vrouwen kunt zien douchen; of de schitterende ontmoeting in Cecilia tussen Marco Polo die alle steden als zijn broekzak kent maar voor wie buiten de stad alles aan elkaar gelijk is, en de herder die in ieder plekje buiten de stad een potentiële met name benoemde weidegrond ziet maar de steden waar hij soms met zijn kudde noodgedwongen doorheen moet trekken niet van elkaar kan onderscheiden, doch jaren later komen ze elkaar weer tegen in Cecilia en beiden zijn het spoor bijster want alle huizenblokken in Cecilia zijn eender en Cecilia is overal.

Weer een andere manier waarop wiskunde in fiction kan voorkomen is de wiskundige in zijn beroepspraktijk. Een enigszins banaal voorbeeld is in het boek *Saturday the Rabbi went hungry* [13] van Harry Kemelman [14]. Deze joods-amerikaanse auteur heeft een hele serie Rabbi-detectives geschreven die spelen in een joodse middle class omgeving in New England. In het genoemde boek is het dodelijk slachtoffer een zekere Isaac Hirsh. Deze werkte als wiskundige bij een private company, het Goddard Lab. Op een avond belt zijn vrouw ongerust naar de politie omdat hij niet thuis is en ook niet op het lab:

> *"What is it, a missing drunk? Why don't we stop at a couple of places downtown first, The Foc'sle and the Sea and Sand, and see if he's there."*
> *"Not that kind of drunk, Tommy. He's some hot-shot scientist. He don't drink, except every now and then he goes on a big toot that lasts for days, even weeks."*

Dan treft de politie hem dood in zijn auto in de garage van zijn huis aan, overleden door koolmonoxyde-vergiftiging. [Wie het boek zelf wil lezen, moet de volgende alinea overslaan.]

Hirsh was een zeer goed wiskundige, hij had aan het Manhattan-project meegedaan. Op het Goddard Lab werkte hij in een tamelijk ondergeschikte positie. Hij was wetenschappelijk verre de meerdere van zijn werkleider dr. Sykes. Het Lab had een opdracht gekregen van de naburige firma Goraltronics. Het preliminary report, grotendeels Hirsh' idee, leek zeer veelbelovend voor Geraltronics en de aandelen van deze maatschappij vlogen omhoog. Maar Sykes wilde er zonder Hirsh verder aan werken, zodat hij met de eer kon gaan strijken. Toen Hirsh aan Sykes meldde dat er toch een fout zat in hun briljante idee, wilde Sykes dit eerst negeren. Tenslotte was dit niet meer houdbaar. Sykes moest het wel gaan melden bij de directeur van het Goddard Lab, waarbij hij de suggestie wekte dat Hirsh de fout gemaakt had. Sykes voorzag dat dit tot het ontslag van Hirsh zou leiden. Alleen moest voorkomen worden dat Hirsh bij het ontslaggesprek met de directeur zou onthullen hoe de vork werkelijk in de steel zat.

Veel meer recht aan de beroepspraktijk van de wiskundige doet het boek *De wilde getallen* [15] van Philibert Schocht. Deze oud-student filosofie en wiskunde van de UvA beschrijft hier een jaar uit het leven van Isaac Swift, een 35-jarige universitair docent aan een niet gespecifeerde, Amerikaans aandoende universiteit. Hij is getaltheoreticus en hij is op het spoor van de oplossing van een beroemd openstaand probleem van Beauregard betreffende de wilde getallen. Op zijn instituut ontmoeten we de beroemde emeritus professor Dimitri Arkanov, iemand van grote reputatie bij wie Isaac nog steeds te rade gaat, en Isaac's voormalige assistent Larry Oberdorfer, nu een briljant collega. Verder is er een al wat oudere wiskundeleraar en crackpot meneer Vale, die naar de universiteit is teruggekeerd om verder te studeren, en die docenten en jongere medestudenten tot wanhoop drijft door tijdens de colleges voortdurend onzinnige vragen te stellen. Ook over het privéleven van Isaac Swift komen we meer te weten. Hij heeft een tijd samengewoond met vriendin Kate, een psychologe. Hij had haar leren kennen toen zij door een vriend van hem naar hem was toegestuurd voor bijles statistiek:

> *We gingen naar de studeerkamer. Terwijl zij haar boeken uitpakte, fulmineerde zij tegen het streven naar wiskundige precisie in het domein van de emoties. Ik kreeg geen kans het met haar eens te zijn. Als wiskundige was ik per definitie een van de slechteriken. De statistische benadering van de psychologie vond zij zo walgelijk dat zij er een bijna fysieke weerstand tegen had. Het was masculien denken op zijn slechtst. Waarom eisten wij mannen dat iets eerst kwantificeerbaar moest zijn voordat wij het als wetenschappelijk beschouwden? Zij had zelf het antwoord klaar: omdat wij in paniek raakten als wij geconfronteerd werden met zaken die zich niet lieten ordenen, en ze derhalve uit de wereld probeerden te verbannen. En waarom raakten wij in paniek? Omdat er niets wanordelijkers en vormelozers bestond dan onze eigen opgekropte, door en door verziekte emotionaliteit.*

Isaac had die avond en nacht een harde dobber om haar de zaak uit te leggen. Maar tenslotte had het wonder van de wiskundige openbaring plaats: "Hoe is het mogelijk! Ik snap het gewoon!" In volgende jaren liep hun relatie niet altijd even soepel. Kate verbood Isaac om 's avonds wiskunde te doen. Ze nam hem een keer mee voor een feestelijk uitje. In de pauze van de balletvoorstelling vluchtte Isaac naar het toilet om zijn tijdens de eerste helft van de voorstelling opgedane ideeën over de wilde getallen op een stukje WC-papier te schrijven. De relatie hield dan ook geen stand.

Nadat Isaac zich een tijd thuis heeft teruggetrokken en daar monomaan aan het vermoeden van Beauregard heeft gewerkt, denkt hij de oplossing in handen te hebben. Er volgt een hilarische gewelddadige ontknoping, waarin Vale, Oberdorfer en Arkanov allen een rol spelen.

Philibert Schocht vertelt wat nader [16] over hoe hij tot het schrijven van dit boek gekomen is in het ook verder lezenswaardige speciale nummer van Bzzlletin over Wiskunde & literatuur.

Hoewel "De wilde getallen", temidden alle fictie die die iets met wiskunde doet, wel een zeer realistisch inkijkje geeft in het leven van een (mannelijk) professioneel wiskundige, ontbreken de stereotiepen zoals sociale onhandigheid, moeizame omgang met vrouwen, koortsachtig doorwerken om een probleem op te lossen, niet. Maar het stereotiepe beeld van de wiskundige is natuurlijk niet voor niets ontstaan. Tot in het absurde doorgetrokken vinden we deze stereotiepen in de film Pi [17], die deze zomer van 2000 al vele weken in onze eigen achtertuin (bioscoop Kriterion aan de Roetersstraat) draait. Hier vermengt het zuiver wiskundige probleem van de mogelijke regelmaat in de decimalen van Pi zich met het financieel zeer interessante probleem van de mogelijke regelmaat en voorspelbaarheid van de beurskoersen en met een heel ander soort toepassing in het kabbalisme.

Referenties

[1] `http://www.science.uva.nl/~thk/`

[2] `http://www.science.uva.nl/~thk/fiction/`

[3] Jonathan Swift, *Gulliver's travels*, Everyman's Library, Dent, London, 1940.

[4] `http://www.science.uva.nl/~thk/fiction/laputa.html`

[5] L. N. Tolstoj, *Oorlog en vrede*, in *Verzamelde werken, deel 3 en 4*, G. A. van Oorschot, Amsterdam, 1966.

[6] http://www.science.uva.nl/~thk/fiction/tolstoy.html

[7] Eelco Runia, *De pathologie van de veldslag. Geschiedenis en geschiedschrijving in Tolstoj's Oorlog en vrede*, Meulenhoff, Amsterdam, 1995.

[8] Paul Vitányi, *Tolstoy's Mathematics in "War and Peace"*, in *JFAK, a collection of essays dedicated to Johan van Benthem on the occasion of his 50th birthday*, http://www.science.uva.nl/~j50/cdrom/contribs/vitanyi/

[9] Alex Kasman, *Review of "Cryptonomicon"*, Notices of the AMS 46, December 1999, pp. 1407–1410.

[10] http://math.cofc.edu/faculty/kasman/MATHFICT/

[11] http://www.emory.edu/EDUCATION/mfp/cal.html

[12] Italo Calvino, *De onzichtbare steden*, Bert Bakker, Amsterdsm, 1981.

[13] Harry Kemelman, *Saturday the Rabbi went hungry*, Fawcett Publications, Inc., Greenwich, Conn., 1967.

[14] http://jewishsf.com/bk970103/obhar.htm

[15] Philibert Schocht, *De wilde getallen*, Arbeiderspers, Amsterdam, 1998.

[16] Philibert Schocht, *Van Fermat to Beauregard — De geboorte van de wilde getallen*, in *Wiskunde & literatuur*, Bzzlletin 266–267, mei/juni 1999, pp. 71–72.

[17] http://us.imdb.com/Title?0138704

Tom H. Koornwinder,
Korteweg-de Vries Institute, Universiteit van Amsterdam
Plantage Muidergracht 24
1018 TV Amsterdam
email: thk@science.uva.nl

Als wiskundige en chef een hele piet

13 april '84 was ik op sollicitatiebezoek in de afdeling Numerieke Wiskunde van het CWI: m'n eerste ontmoeting met Piet van der Houwen, de afdelingschef. Er was een promotieplaats vacant bij Piet Hemker, wetenschappelijk medewerker in de afdeling. Vooraf was me gevraagd een voordracht voor te bereiden over een numeriek wiskundig onderwerp. Een voordracht over een onderzoek dat ik juist ergens anders aan het afronden was leek me wel wat, onderwerp: het langs de imaginaire as oprekken van het stabiliteitsgebied van een meer-stage Runge-Kutta schema. Ik meende inmiddels goed werk aan dit originele onderwerp te hebben gedaan. Tijdens de voordracht werd me duidelijk dat de afdelingschef, een niet nadrukkelijk aanwezige man, ook wel wat van Runge-Kutta methoden wist; op vriendelijke toon stelde hij een paar spitse vragen. Na afloop had de sollicitatiecommissie overleg, ik was gevraagd zolang in de bibliotheek te wachten. Vast niet voor niets dacht ik, m'n werk moest als goed zijn beoordeeld. Na enkele minuten kwam de chef me opzoeken. Hij gaf me een overdrukje van een door hemzelf geschreven tijdschriftartikel en een conceptartikel van twee andere auteurs, beide over precies hetzelfde onderwerp als waarover ik juist had gesproken! [1] [2] Het was me plotseling duidelijk: de chef was een deskundige op het gebied van Runge-Kutta methoden, het onderzoeksonderwerp was niet meer origineel en m'n resultaten niet echt denderend. M'n lopende onderzoek kon nog mooi van de artikelen profiteren, maar voor de afloop van de sollicitatie hadden ze mogelijk negatieve gevolgen. Weer bij de commissie bleek dat gelukkig mee te vallen; de baan werd me aangeboden! Een uitmuntende kennis van numerieke wiskunde behoefde een promovendus bij binnenkomst in de afdeling niet persé te hebben, die kon men in de afdeling zonodig zelf wel bijbrengen (een zelfbewuste houding die men nog altijd heeft in de uit de afdeling Numerieke Wiskunde nieuw ontstane onderzoeksgroepen).

Eenmaal in de afdeling aan het werk kreeg ik die scholing weliswaar vooral bij Piet Hemker, maar van Piet van der Houwen bleef ik ook numerieke wiskundekennis opdoen, hetzij lezend in één van z'n publicaties, of gewoon direct in de wandelgangen. Een paar jaar geleden, toen ik een

[1] P.J. van der Houwen, Explicit Runge-Kutta formulas with increased stability boundaries, *Numerische Mathematik*, **20**, 149–164 (1972).

[2] P. Sonneveld and B. van Leer, Towards the solution of Van der Houwen's problem (1983).
De titel van dit conceptartikel moest nog wel worden veranderd vond de chef, later – bij publicatie – was dit inderdaad gebeurd:
——, A minimax problem along the imaginary axis, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, **4**, 19–22 (1985).

opdracht uitvoerde voor een bedrijf, kwam ik Piet eens 's avonds bij het naar huis gaan tegen, beneden in de hal van het CWI. Hij vroeg hoe de opdracht verliep. "Wel redelijk", antwoordde ik en vertelde iets over het rekenprobleem waar ze bij het bedrijf mee zaten. "Oh, dan werkt die-en-die methode misschien, die is zoveelste-orde nauwkeurig en loeistabiel", was ongeveer zijn reactie. Een gesprekje van een halve minuut dat vruchtbaar bleek te zijn: de methode werkte inderdaad, opdracht met succes afgerond. Piet's numerieke wiskundewerk staat niet ver van de praktijk. Er zit altijd wel iets nuttigs in, zo nu en dan iets heel nuttigs dat internationaal goed op de kaart komt. Een sprekend voorbeeld hiervan vind ik dat een overzeese pionier op het gebied van de vliegtuigaerodynamica, meneer Jameson uit Princeton, regelmatig heeft verwezen naar een boek van Piet [3], als van fundamenteel belang zijnde voor z'n eigen praktische werk (bijvoorbeeld in [4]).

Van Piet's rol als afdelingschef merkte je ogenschijnlijk niets. In de zelfregulerende afdeling Numerieke Wiskunde heerste een ideale werksfeer. Vrijheid en ijver stonden er hoog in het vaandel, een werksfeer die mede door Piet in stand werd gehouden. Piet stimuleerde anderen in hun werk, gewoon al door zijn eigen manier van werken, maar ook door belangstelling te tonen voor het werk van anderen. Hij deed dat consequent na afloop van een voordracht van een jonge medewerker en vaak ook na het verschijnen van een rapportje.

Onzichtbaar voor mij is gebleven wat Piet voor de afdeling heeft gedaan in bijvoorbeeld vergaderingen met de CWI-directie, daar publiceerde hij niets over. Hij heeft er vast weleens voor de afdeling moeten knokken, bijvoorbeeld als zich donkere financiële wolken boven het CWI samenpakten. Ik denk dat hij ons er dan altijd probeerde door te loodsen, zonder dat je als jonge medewerker last had van de storm.

Onvergetelijk zijn de 'etentjes' bij Piet en Aly thuis. Hoe zij het klaar hebben gespeeld om soms eerst de ene helft van de afdeling (met aanhang) te vergasten op een heerlijk diner en een paar weken later de andere helft, is Wijnie en mij nog een raadsel.

Piet, ik hoop dat je na je pensionering veel van je vrije tijd kunt genieten, met Aly en jullie kinderen en kleinkinderen. Het ga je goed!

Barry Koren

[3] P.J. van der Houwen, *Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems*, North-Holland, Amsterdam (1977).

[4] A. Jameson and T.J. Baker, Solution of the Euler equations for complex configurations, *AIAA-paper 83-1929*, American Institute of Aeronautics and Astronautics (1983).

Wine in Campania: a millenary tradition

Eleonora Messina

1 Introduction

Aly and Piet's passion for wine is well known to everybody, and I had heard about it even before I met them. During the period I spent in Amsterdam as a guest member of CWI, I had a number of opportunities to sample some of the extraordinary wines of the van der Houwen cellar and to appreciate their taste, their colour and their smell. Infected by Aly and Piet's enthusiasm, I decided to read up on the most typical and representative wines of the region where I'm from in Italy: Campania, known to the ancient Romans as *Campania felix*, due to its 'happy' geographical position, the fertility of its soil, and its natural bounty.

My contribution to the Liber Amicorum aims to provide an overview of the millenary history and tradition of wines in Campania. Viticulture and wine-making have ancient traditions in almost all the Italian regions, but it is in Campania that these traditions have arrived to us almost intact. Campania has preserved, across the centuries, not only its traditional grape-growing methods but actual varieties - *Falernian*, *Aglianico*, *Greco* and *Fiano*, among others - that go back many centuries.

2 The ancient origins and long history of wine in Campania

The beginning (at least in literary terms) of viticultural history in Campania, and in the Mediterranean West in general, can be found in the ninth book of *The Odyssey*. Here, from the description of the Island of the Cyclops and of Polyphemus getting drunk, it is clear that two different kinds of grapes were already cultivated at that time in the Mediterranean area: one in the East that produced 'strong and dark' wines, like the wine from Ismaro (Thrace), and one that reportedly came from the Island of the Cyclops, which could be taken to mean the western area of the Mediterranean. According to the Homeric verses, the wine from this latter region was made out of big bunches of grapes harvested from vines that didn't need to be planted or cared for. This book of *The Odyssey*, then, suggests that in the Homeric age a more sophisticated viticulture coexisted with another, more primitive one based on the gathering of wild grapes, with little or no formal cultivation.

We can imagine that the western area referred to in the Homeric text includes southern Italy. As a matter of fact, some historians report that the inhabitants of Campania were growing grapes already 3000 years ago, long before the Greek colonists arrived. Moreover, a part of Lucania and Puglia was already known as 'the land of wine' (Enotria), which indicates that wine was produced in this region even before the foundation of the Magna Graecia cities. It was the Greeks, however, who must be credited for transforming wine from a simple foodstuff into a commercial product and for associating wine with the cult of a god, namely Dionysus, patron of viticulture. These peaceful colonisers, whose presence is documented as far back as the eighth century B.C., with the colonies of Ischia and Cumae, are the ones who gave a vital impetus to local viticulture, with the introduction of superior varieties such as the Greco and the Aglianico grapes. They were responsible for the first systems of rational pruning, which reduced the yield of grapes per plant, and for locating the vineyards on hills in well exposed and windy areas. The so-called *in vinea* method of cultivation imported by the Greek colonists provided for the vines to be cut short and to be supported against each other so as to prevent the grapes from touching the ground.

If the Greek presence was strong along the coasts of Campania, the inland was occupied by another civilisation, the Etruscans, who started moving southward around the seventh century B.C. The relationship that developed between the Campanian Greek colonies and the Etruscans is marked by cultural permeation rather than by ethnic and political conflict. But in spite of the integration that doubtless occurred between the two civilisations, their respective viticultural traditions have remained pure and distinct down to our own day. In addition to the *in vinea* cultivation typical of the Greek colonies, a new method of grape cultivation - known as the *ad alberata* system - began to be used, mainly in the flat Campanian inner lands. The peculiarity of this method, which was developed by the Etruscans and allows for a larger yield of grapes per plant, consists in using trees such as the poplar or elm as stakes, so as to enable the vines to grow high off the ground. The *ad alberata* method had the advantage, for the Etruscan peoples, of leaving the ground free for planting vegetables.

The Etruscan presence in Campania greatly stimulated grape and wine production on the plains at the foot of Vesuvius, so that there was a considerable increase in the number of farmers as well as merchants. And the area around Capua, the most important Etruscan commercial city in the region, was where the famous *Falernian* wine was produced. This was the most prestigious wine in ancient Rome and the emperor's personal favourite.

The Romans, in their political-cultural encounters and clashes with the Etruscans, began to learn wine-making from the time of the earliest kings. They inherited some valuable varieties of Greek origin (the *Amineae* and *Byblinos* grapes) and most of the wine culture existing before them. Viticulture began developing in a big way at the end of the Punic Wars, as testified by the writings of Cato the Censor, who wrote that anyone wishing to buy a good farm should consider, in the first place, the grapes it produced. But it was in the period between Cato and Pliny the Younger (61-113 A.D.) that wine began to be produced on a vast scale. During these years wine exporting assumed great importance and it became more and more common for wine to be bought and consumed in 'taverns' known as *thermopolia*, many examples of which were found in the excavated town of Pompeii, buried by the eruption of Vesuvius in 79 A.D.

The archaeological excavations in the Vesuvian area of Pompeii, Herculaneum and Boscoreale also offer extraordinary evidence of the importance and widespread use of wine among the Romans. Important discoveries at Herculaneum include the *taberna vinaria* in the House of Neptune and Anfitrite, a *vinis stabulum* (wine cellar) in the House of Innio Teofilo and Tetteio Severo, a graffito on the wall of the House of Argo which stipulates the price of an unknown quantity of wine, and the names of producers inscribed on wine amphorae. These finds indicate that Herculaneum, like Naples and Pompeii, was a city where wine production was carried out by small producers whose agricultural activity was not only an immediate source of income but a long-term investment.

The Vesuvian excavations are also significant for what they reveal about wine-making technology. Although it is difficult to ascertain the specific composition of ancient wines and the actual methods for making them (due mainly to the lack of reliable historical descriptions), we are able to glean the basic characteristics of the wines produced by analysing what remains in the wine-making rooms of the Villa of Mysteries at Pompeii and its counterpart at Boscoreale.

The grapes were pressed in shallow containers known as *palmenti* that were slightly tilted towards terra-cotta vessels (the *pithoi* and the *dolia*) suitable for fermentation, often half-buried in the floor and made impermeable by resin or tar. The wine obtained by pressing was considered a choice wine, whereas that produced by squeezing marc in a cloth bag was an inferior wine.

Classical authors refer to Campania as the vineyard of Imperial Rome. The *ager campanus* was where the most celebrated wines were produced; preferred by emperors and patricians, their fame even extended to the northern side of the Alps. Under Roman rule, Naples and the whole of Campania exhibited considerable wealth ınd refinement. Even if viticulture around the Roman town of Ɉeapolis was limited by the presence of large tracts of marshland, here were intensively cultivated areas, such as the lands around 'esuvius, made extraordinarily fertile by volcanic activity, and the ;orrento Peninsula.

In Roman times the elite vineyards concentrated in Campania had no equal in the rest of the Italian Peninsula. Campanian wines were numerous and renowned, as proven by the many amphorae that have been found. Tchernia, in a fairly recent publication, cites 22 Campanian wines as against the 18 in Lazio, 9 in Etruria, 7 in Lucania, Abruzzo and Tre Venezie, 6 in Emilia, 5 in Puglia and Umbria and 3 in the Marche.

The most famous and prestigious grapes were the *Amineae*, which were used to make *Surrentinum* wine on the Sorrento hills and *Vesuvinum* at the foot of Mt. Vesuvius. And there was also, of course, the aforementioned *Falernian* grape. The famous wine of the emperors was produced in the so-called *Ager Falernus* and from a single variety of grape, according to Pliny and Catullus. Thanks mostly to the writings of Horace, we can characterise this wine as *severus* (thick), *fortis* (strong), and *ardens* (hot), this last term probably indicative of a high alcoholic content. As the wines aged, these characteristics intensified, producing a typical bitter taste that was mitigated by the addition of honey. This mixture, besides sweetening the *Falernian* wine, had a symbolic meaning: it represented the union of Latin strength and Greek gentleness. The legendary longevity of this wine is testified to in Petronius's *Satyricon*, when Tremalchio talks about a *Falernian* that is 100 years old. But if greatly aged wines were produced in the *Ager Falernus*, not all of them took the name of their locale. Together with the *Falernian*, the *Surrentinum* and the *Vesuvinum*, the *Albanum* and the *Caecubum* completed the list of the choicest vintage wines. They were generally strong, sweet wines made from over-ripe grapes, left on the vine until as late as November. Besides this noble class of wines, numerous documents indicate that there was a wide range of mid-level and low quality wines. Some of them were known only locally and consumed only by the lower classes, which confirms how important and widespread this product was.

In fact most of the wines produced in the Graeco-Roman era, including even vintage wines, very likely resembled alcoholic syrup more than our actual drink. For it seems that the wine, in order to be drunk, had to be mixed with water. It was only towards the end of the imperial era, when Graeco-Roman culture was in its decline, that the wine became more and more like what we drink today.

It's important always to remember that a great rift separated the wine culture of the classical age from the one that followed.

Viticulture on the Italian Peninsula wasn't immune to the crisis of the Western Roman Empire and the general decadence that characterised the beginning of the Middle Ages. From the second century A.D. until the fall of the Western Roman Empire, agriculture and wine production were beset by ever increasing difficulties. One of the main reasons for this crisis was the incorporation of small farms into the latifundia of big landowners, who preferred growing cereals to grapes, since the latter were more labour-intensive and involved greater risks.

During the third and fourth centuries A.D., the decline was particularly acute in Campania itself, afflicted by the progressive depopulation of the countryside, as well as by successive wars and plagues. Another cause of decadence was the shifting of maritime traffic routes toward ports farther north.

During the occupation of the Visigoths (410) and the Goths (553), the countryside continued to be unsafe and unstable, but with the arrival of the Longobards, who in 571 founded the reign of *Longobardia Minor* in Benevento, a certain rebirth of viticulture took place. But it only regained its former importance as a vital economic activity in the Carolingian age, when grapes were once more grown in the open countryside, becoming more widely cultivated thanks to the many deforestation and drainage works undertaken by monastic communities, especially the Benedictines. It seems that the spread of the Benedictine rule itself, starting in the tenth century, together with the new relationship formed between property and peasants (*pastinato*, land concession *ad meliorandum*), encouraged the expansion of grape cultivation in Campania.

More generally, it was a period when the culture of wine was decisively reaffirmed, with the medieval rebirth of viticulture coinciding with the expansion of Christianity and the new symbolism that connected wine with the sacrifice of the Mass. Wine gained a central role in the agricultural economy of that period, as testified by the laws and statutes issued in defence and in favour of grape production, but this was a quantitative more than a qualitative development. As occurred elsewhere in Italy and Europe, Campanian viticulture in the Middle Ages assumed unprecedented dimensions, with grapes being cultivated even on land that was not ideally suited for them. This phenomenon, in Campania as elsewhere, can be explained by the sacral character of wine, by its use for medicinal purposes, and by the fact it provided a cheap source of calories and of distraction from life's rigours. The commercial importance of wine is proven by the disorders that broke out in the 13th and 14th centuries because of price wars between Salerno and the other Campanian provinces.

The situation changed after the population drop caused by the 1348 plague. Vineyards in areas not especially suitable for grapes were abandoned, while production stepped up in some of the major wine-producing regions (Tuscany, Liguria, Oltrep, etc.). In Campania the vineyards of Posillipo, Resina, Salerno and the island of Ischia assumed greater importance. Their 'Greek' and 'Latin' wines conquered more and more of the English and French markets, successfully competing with the malmseys of Cyprus, Crete and the Peloponnesus. What's more, Naples was the most important medieval port for exporting wine to northern Italy and the Aragonese-Balearic area.

The beginning of the modern era saw a decline in individual wine consumption, but quality improved, and there was a greater variety of wine on the market. The good name of Campanian wines is testified to in the Renaissance by Sante Lancerio, the wine master of Paul III, the Farnese Pope. Lancerio left a list in which he classified 53 Italian wines, 18 of which were from Campania. It was in this period that names such as *Greco* and *Lacryma* were born.

Starting from the end of the 16th century, long periods of stagnation alternated with brief upsurges in Campanian viticulture, which was surely not helped by the long Bourbon domination. There can be no doubt that the re-feudalization of the Reign of Naples and the heavy taxation imposed by Spain were largely responsible for the decline of Campanian viticulture in the 1700s.

If the arrival of the so called 'American diseases' (oidium, mildew, phylloxera) in the second half of the 19th century initially led to an increase in wine production in Campania, it ultimately had disastrous consequences. The initial increase was due to the slower development of the phylloxera infection in Campanian vines as compared with French and northern Italian vines. Campania, which took up the slack in European production, thus became Italy's most important viticultural region in the first decades of the 1900s. The drastic inverse tendency began with the outbreak of the Second World War and its aftermath of poverty and destruction. In spite of the insistence of technical organisations, the vineyards of Campania were replanted without resorting to the remedies that had been developed in the United States. They were therefore subject to attacks of phylloxera, while other European wine regions thoroughly renovated their viticulture. This, together with the consequences of the war and a decreasing rural population, prompted a strong decline in grape cultivation. But the roots of the problem ran deeper, and had to do mainly with the structural characteristics of Campanian wine industry, which included very few large vineyards. It consisted, instead, of numerous growers who made small quantities of wine using primitive methods that weren't able to produce a stable wine suitable for the wider Italian market, let alone the European market.

The problems of wine production in Campania and the southern regions in general are thus intimately related to the inveterate economic underdevelopment of southern Italy. But as we shall see in the next section, there are recent, encouraging signs of a recovery in the Campanian wine industry.

3 Campania's contemporary wine industry, by geographical area

If the Campanian wine industry of the twentieth century has been held back by its uncompetitive production methods and by the relative economic backwardness that plagues southern Italy in general, it can at least count on its enviable climatic conditions and its millenary tradition. But it would be absurd, with respect to that tradition, to equate today's wines with those produced by the ancient Greeks and Romans. Although prestigious names such as Caecubum and Falernian still count among the Campanian wines produced nowadays, it's hard to imagine any correspondence between these and the strong sweet wines of ancient times.

The story is rather different, however, when it comes to the grapes themselves, with the choice varieties of antiquity still occupying the stage. The areas where the Greco, Aglianico and Fiano grapes are currently grown, although they have undergone inevitable transformations over the centuries, seem to have kept a close link with their Graeco-Roman origins. This link has to do not only with the quality of the vines but also - and this is the far more interesting point - with how they are grown. The surprising fact is that the two cultivation methods - *in vinea* and *ad alberata* - used in Campania from ancient times are still used today, and in the very same areas.

Although Campania's wine industry is beset by various economic problems, in the last ten years it seems to have made important strides. It has adopted modern production techniques that were developed abroad, and it has managed to change significantly its image. There are now many high-level producers who have brought in a new entrepreneurial know-how, though this has so far affected only a few sectors of the industry. The great productive ferment is reflected in the number of Campanian DOC wines, which has exactly doubled in just one decade, from nine in 1990 to eighteen today.

The geography of wines in Campania turns out to be quite rich. Avellino, which ranked third among Italy's wine provinces before the phylloxera infection, is perhaps the province that in recent years has made the greatest qualitative leap. This zone produces Taurasi, the first and only southern wine to obtain the prestigious DOCG classification. A varietal made from Aglianico grapes, Taurasi is produced in the vicinity of the small town for which it is named. There the geographical position, the relief of the land and the altitude of the vineyards (from 400 to 600 metres above sea level) all combine to create an environment very similar to the one found in the Langhe area of the Piedmont, such that Taurasi has earned the name of 'the Barolo of the South'. Greco di Tufo and Fiano di Avellino are the other two wines, both of them white, that have most contributed to the new image of Campania's wine industry.

Another area of some importance is Benevento, which is responsible for over 40 per cent of the region's wine production. The wines of this district, crossed by the Calore River, include Solopaca in both a red and a white version, and red or rosè Taburno, which is made from Aglianico grapes. Other wines include the varietals from Sant'Agata de' Goti and from the hill district, whose wines belong to a newly created DOC called Sannio.

The province of Caserta can also boast of quality wines, such as the robust, Aglianico-based red with the evocative name of Falerno del Massico, and the Asprinio white from Aversa, which comes in sparkling and still versions. Here we can still find vines cultivated according to the *ad alberata* method. They form stately green walls that rise up to 15 metres from the ground and can bear as many as 400 kilos of grapes per stump. Unfortunately this venerable method, so characteristic a feature of the Aversa countryside, risks being slowly replaced by other methods that require less work. In the border area between Caserta and Naples we find the legendary Campi Flegrei, whose special soil of volcanic origin produces the white Falanghina and the red Per'e Palummo, whose name is dialectal.

Within the province of Naples, the unusually fertile land at the foot of Mt. Vesuvius naturally has similar characteristics. The renowned Lacryma Christi wine, produced in white, ros and red versions, probably owes its name to the role played by the Jesuits in planting most of the grapes that cover the volcano's slopes. Mention should also be made of the islands of Capri and Ischia, which have remained faithful to their ancient traditions of wine manufacture. The former is most famous for its whites but also produces reds on its terraced slopes, while the latter produces a regular white, a superior white, and also a red wine. South of Naples, the peninsula of Sorrento continues to produce fine wines of various kinds. It is divided into the sub-zones of Sorrento, Gragnano and Lettere; these last two areas are particularly well known for their homonymous reds, light and sparkling and quite appreciated by Neapolitans.

Proceeding still further south, we enter the province of Salerno, which includes the zone of Amalfi, likewise divided into three subzones - Ravello, Furore and Tramonti - which produce white, ros and red varieties. More atypical is the zone of Castel San Lorenzo, which, in addition to a white wine, produces an unusual Barbera varietal. Finally, along the southern Campanian coast, we come to Cilento, an area characterised by calcareous and dolomitic soils that produce, among others, a fine Aglianico wine.

The panorama of the Campanian wine industry has, as we can see, become wider than ever. One of the keys to this success is no doubt the rediscovery and revival of Campania's own rich heritage as a producer of grapes and wines.

The future of Campanian enology looks good when viewed in the light of recent progress and when we consider the great potentialities of a region whose name, *Campania felix*, was surely no accident.

References

[1] A. CORNACCHIA - B. MACRÌ, *Il Turismo del Vino in Campania*, Movimento del Turismo del Vino (1999).

[2] A. SCIENZA, *Per una storia della viticoltura campana*, Camera di commercio di Napoli `http://www.na.camcom.it/vinicampania` (1990).

Bijdrage aan het afscheid van Piet van der Houwen van

Wim [redacted]

Gaarne voldoe ik aan de oproep van Herman te Riele om ook een bijdrage te leveren aan het Liber Amicorum voor Piet van der Houwen.
Ik was er al ruim 6 jaar werkzaam op de afdeling Comptabiliteit toen Piet op 1 april 1964 in dienst trad van de Stichting Mathematisch Centrum, kortweg "het MC", als wetenschappelijk medewerker bij de Rekenafdeling. De eerste kennismaking met Piet zal ongetwijfeld op zijn eerste werkdag plaats hebben gevonden op de afd. Comptabiliteit. Zoals Piet memoreerde in zijn bijdrage op de bij gelegenheid van mijn 40-jarig dienstjubileum samengestelde Discus AmicoROM bestond de afd. Comptabiliteit uit mevr. Reckman als hoofd en mijzelf in de functie van boekhouder. Mevr. Reckman deed voornamelijk de personele aangelegenheden zoals salarissen, sociale verzekeringen, pensioen-aangelegenheden, arbeidsvoorwaarden etc. Na de kennismaking zal Piet zeker van mij de instructie "invullen werkbriefjes" hebben gekregen alsmede een lijst met opdrachtnummers waarop hij zijn werkzaamheden moest verantwoorden. De gehele wetenschappelijke staf van het MC vulde, met uitzondering van de afdelingschefs, wekelijks een werkbriefje in dat na inzameling door mij werd verwerkt tot financiële overzichten en declaraties. De per opdracht bestede tijd moest in kwartieren nauwkeurig geregistreerd worden. Er waren zogenoemde improductieve en productieve opdrachten; laatstgenoemde betroffen het eigen onderzoek en onderzoek ten behoeve van derden. Zo werd b.v. het lezen c.q. bijhouden van de vakliteratuur maar ook ziekte, verlof e.d. als improductief beschouwd.
Piet was in mijn herinnering altijd trouw en op tijd met het invullen en inleveren van zijn werkbriefje. Ik denk dat het een hele bevrijding voor hem was toen hij na zijn benoeming tot chef van de afdeling Numerieke Wiskunde ontheven was van de verplichting om nog langer tijd te schrijven.

Van de 36 jaar die Piet bij de stichting werkzaam is geweest heb ik hem 35 jaar als collega meegemaakt. Ik heb altijd prettig met hem samengewerkt en ik heb ervaren dat dat wederzijds was. Piet bedankt voor je collegialiteit. Nu je besloten hebt vervroegd uit dienst te treden krijg je alle tijd voor Aly, jullie familie en je hobby's. Je houdt van lekker eten, een goed glas wijn, je speelt schaak en luistert graag naar muziek en er zijn vast nog veel meer dingen die je in de vrijgekomen tijd wilt gaan doen. Misschien wel zelf koken (het is een suggestie).

Om je daar een beetje bij te helpen volgen hierna twee betrekkelijk eenvoudige recepten uit landen op het Afrikaanse continent. In ons gezin werd het gerecht regelmatig bereid en gegeten omdat onze kinderen "kip Zaïre" erg lekker vonden.

KIP OP ZAÏRESE WIJZE

Dit gerecht komt uit Zaïre, het tegenwoordige Congo. Dergelijke éénpotsgerechten worden in bijna alle Afrikaanse landen gekookt. Er zijn er heel veel van, omdat elke kok zijn of haar eigen recept kan bedenken.
Houd je van heetgekruide spijzen, kun je het gerecht kruiden met Cayennepeper, maar wees een beetje voorzichtig; het wordt al gauw te heet.

Ingrediënten

2 middelgrote uien	1 tomaat
- kopje pinda- of zonnebloemolie	2 theelepels zout
1 kip, vers of uit de diepvries,	1 theelepel peper
in stukken gesneden	2 kopjes water
(ongeveer 1-1,5 kg)	- blikje tomatenpuree
1 à 2 eetlepels meel	
- à 1 theelepel Cayennepeper	

Verdere benodigdheden

keukenmesje	spatel
kopje	theelepeltje
vuurvaste schaal met deksel	eetlepel
keukenpapier	kleine schaal

De bereiding:

1. Schil de uien en hak ze in stukjes.
2. Droog de stukken kip af met keukenpapier. (Als de kip vochtig is, kun je hem niet zo gemakkelijk aanbraden.)
3. De olie in de schaal verhitten.
4. De uien en de stukken kip erin doen en rondom aanbraden.
5. Snij de tomaten in partjes.
6. Doe de tomaten, het zout, de peper, het water en de tomatenpuree in de vuurvaste schaal.
7. Doe de deksel op de schaal en laat het gerecht 45 minuten op een kleine vlam koken.
8. Roer 3 eetlepels meel met 3 eetlepels koud water in de kleine schaal goed door elkaar en giet dit mengsel ook in de schaal. Op een kleine vlam roeren tot het mengsel een beetje is ingedikt.
9. Het gerecht heet opdienen.

Een heel bijzondere Zaïrees éénpotsgerecht verkrijg je door toevoeging bij nr. 6 van de volgende extra ingrediënten:

1 paprika, zonder pitten en in stukken gesneden
1 of 2 harde bananen, geschild en in plakjes gesneden
2 tot 3 aardappelen, geschild en in dobbelsteentjes gesneden
- kopje ongezouten, fijngehakte pinda's.

Na het opdienen dit gerecht savoureren met een goed glas bier.

Om deze maaltijd compleet te maken volgt hier ook nog een recept voor een fris en de tong strelend nagerecht. Het is een vruchtenschotel uit Oeganda voor 4 tot 6 personen.
Oeganda is een heet en vochtig land maar toch groeien er de heerlijkste vruchten zoals bananen, ananas, sinasappels, grapefruits, papaja en mango. Al dit fruit is in speciaalzaken maar ook vaak in de beter gesorteerde supermarkt te koop.

Ingrediënten

2 Sinasappels	3 Bananen
1 Kleine meloen	1 of 2 Citroenen
1 Papaja	

Verdere benodigdheden
Keukenmesje
Groot, plat bord

Zo ga je aan de slag
1. De sinasappels schillen en in partjes verdelen. Even apart zetten.
2. De meloen of papaja doormidden snijden. De pitjes eruit halen. Dan iedere helft in 4 - 6 stukken snijden en van ieder stuk de schil verwijderen.
3. Schil de bananen kort voor het opdienen.
4. De bananen in de lengte doormidden snijden.
5. Leg de bananenhelften op het bord op de manier waarop spaken in een fietswiel zitten: in een punt naar het midden.
   Leg de sinasappelpartjes en de stukken meloen tussen de bananen.
7. Snij vervolgens een citroen in 6 stukken.
8. Deze stukken ook over de vruchten schotel verdelen.
9. Druppel tenslotte het sap van de andere citroen op de bananen, dan worden deze niet bruin.

Al naar gelang de tijd van het jaar kunnen ook andere vruchten gebruikt worden zoals appels, aardbeien, verse ananas, perziken, peren, pruimen, enz.
Om het helemaal lekker te maken, kan er ook ijs of slagroom bij de vruchtenschotel geserveerd worden.

Mijn virtuele kamergenoot

Toen mij gevraagd werd om mijn kleine éénpersoonskamer te verruilen voor een twee keer zo grote kamer, maar dan samen met jou, moest ik even slikken. Een kamer delen met mijn vroegere chef van NW, een man wiens werk, in mijn ogen, voornamelijk bestond uit vergaderen, leiding geven, en verder talloze promovendi over de streep trekken. Zou ik niet gezien worden als je nieuwe secretaresse? Wat moest ik bij zo'n iemand op de kamer? Maar, zo overtuigde men mij, door de kanteling, was je "chef–af" en kreeg je als CWI–fellow weer tijd voor de wetenschap. Geen vergaderingen meer en veel minder aanloop. En bij je nieuwe status hoorde kennelijk ook een kleinere of gedeelde kamer.

En zo ging ook jij akkoord. Ik vermoed dat het voor jou een veel grotere stap was dan voor mij. Als chef had je altijd een grote eigen kamer gehad, met mooi donkerbruin houten meubilair, een grote vergadertafel met heerlijke stoelen en een wand vol met boeken. Opeens werd één van de houten kasten vervangen door een modern bureau, een ladenkastje en een rode stoel. Wat we ook probeerden, het werd niet bepaald een eenheid.

In feite was onze kamer oneindig groot. We kwamen elkaar zelden of nooit tegen. De verdeling van de kamer was eenvoudig: de dinsdagen en de donderdagen behoorde hij jou toe, de rest van de week was hij van mij. Volgens mij waren we allebei een beetje van slag als we samen waren, dan was er altijd één van ons op bezoek. Gesprekken met derden werden dan op de gang of elders gevoerd, telefoongesprekken werden snel afgekapt en als het even kon, ging één van beiden vroeg naar huis. In het begin durfde ik nauwelijks jouw kamerhelft te betreden, later heb ik dankbaar gebruik van de vergadertafel gemaakt. Alleen lunchen (lees: "klaverjassen") paste niet in deze omgeving.

Vijfentwintig jaar zijn we collega's geweest. Onze gesprekken gingen meestal over eten en drinken of kampeervakanties en zelden over numerieke wiskunde of computers. Ze vonden ook meestal plaats bij promoties, recepties en jubilea. Ook regelmatig zijn NW-ers bij jou en Aly thuis uitgenodigd voor een bijzonder lekker etentje en natuurlijk een goed glas wijn.

Je was altijd erg geïnteresseerd in mijn gezinsleven. Mede dankzij jou heb ik altijd mijn werk goed kunnen combineren met een gezin. Toen Joke Blom en ik in 1977 als duo solliciteerden op een baan als wetenschappelijk programmeur, heb je geen moment getwijfeld of deeltijdwerk wel mogelijk was op dit niveau. Sterker nog, we werden gesommeerd om binnen vijf minuten onze sollicitatiebrief in te leveren.

Het feit dat ik je voortijdig in de steek heb gelaten in M264, is niet omdat ik het niet langer bij je uithoud. Integendeel! Mijn probleem is waar vind ik ooit weer zo'n kamergenoot!

Piet, het ga je goed,

Margreet Nool

Aan Professor Van der Houwen

Bij het naderende afscheid van Professor van der Houwen, bedenk ik dat ik hem al ken zolang ik op het MC resp. CWI ben. Ondanks de schijnbare formele sfeer die er tussen ons heerst — zo noem ik hem inderdaad nog steeds professor of meneer, intussen bijna een uitzondering op het CWI — heb ik vooral in de laatste 20 jaar vrij veel contact met hem gehad.

Het begon toen hij in 1981 bereid was om de functie van "Inspecteur der Boekerij" van het Wiskundig Genootschap (WG) op zich te nemen. Hij vertrouwde me toe dat hij daarin heeft toegestemd omdat hem werd verteld dat hij hiervoor vrijwel geen werk hoefde te verrichten daar ik al het meeste deed.

Dat bleek een vergissing te zijn. Wat was het geval? De WG boekerij was vanaf tenminste 1880 in bruikleen geplaatst op de UB van de Universiteit van Amsterdam, terwijl de adresadministratie en correspondentie vanaf 1946 op het CWI werden uitgevoerd. De collectie van de boekerij bestaat voornamelijk uit publicaties (m.n. tijdschriften) die door middel van ruil worden verkregen.

Het WG bestuur uit de jaren 80 was van mening dat de boekerij op de UB niet optimaal werd gebruikt en verzocht de CWI directie om accoord te gaan met het voorstel om de lopende tijdschriftencollectie voortaan in bruikleen op het CWI te mogen onderbrengen. Het bestuur regelde de kwestie met de UB, en de CWI directie ging accoord met het voorstel. De wijziging ging per 1 januari 1986 in.

De omzetting betekende echter niet alleen het doorgeven van een adreswijziging. Er bestond een grote overlap tussen de bestaande ruilovereenkomsten van het CWI en die van het WG. Daardoor moesten het bezit van het CWI en dat van het WG ontdubbeld worden, waarbij in principe de ruilovereenkomsten van het WG werden voortgezet. Dit veroorzaakte alle mogelijke misverstanden en problemen bij ruilpartners uit verre landen. Een aantal ruilpartners wilde liever de ruil met het CWI voortzetten en niet die met het WG. Door deze ontwikkelingen bleek Van der Houwen, tot zijn schrik, in feite veel meer betrokken te raken bij de zaken van de boekerij dan hij zich ooit heeft voorgesteld.

Het moet gezegd worden dat hij altijd bereidwillig was om zijn tijd hierin te investeren voor het zoeken van een goede oplossing. Hij was ook zo sportief geweest om zich hierover nooit te beklagen en heeft zelfs de functie tot 1994 vervuld. Ook na die tijd was hij nog altijd geïnteresseerd in het welzijn van de boekerij maar ook in dat van de CWI bibliotheek.

Hij heeft in de afgelopen jaren veel eigen publicaties aan de bibliotheek geschonken, ook wanneer de uitgevers van mening waren dat de bibliotheek beter een eigen exemplaar kon kopen, omdat dit goed was voor de omzet.

Beste Professor van der Houwen,

Bij deze gelegenheid wil ik u hartelijk bedanken voor de altijd prettige samenwerking. En mede namens de bibliotheek geldt onze bijzondere dank voor de belangrijke bijdrage aan de bibliotheekcollectie. Ik hoop van harte dat de problemen met uw gezondheid geen belemmering zullen blijken om in de toekomst nog leuke dingen te kunnen doen.

Ayling Ong

Overpeinzingen over Onderzoek

Gerard van Oortmerssen

Ik ken Piet van der Houwen al zo'n 15 jaar. In die jaren heb ik hem leren kennen als een zeer toegewijd onderzoeker en een integere persoonlijkheid. Vele jaren maakten we samen deel uit van de WGS, wat eerst stond voor Werkgroep Supercomputers, en later, na de vorming van de stichting NCF, voor Werkgroep Gebruik Supercomputers. Onze professionele interesse vertoonde een grote mate van overlap: het grootschalig rekenen aan vloeistofstromingsproblemen. Piet's invalshoek daarbij was de toegepaste wiskunde, terwijl ik vooral geïnteresseerd was in de fysische stromingsverschijnselen.

Het afscheid van Piet inspireerde mij tot nadenken over de verschillende modaliteiten van onderzoek, misschien doordat we in de WGS zaten met een verschillende achtergrond: ik (tot mijn overstap van het MARIN naar het CWI in 1991) vanuit de sfeer van de GTI's (Grote Technologische Instituten), Piet vanuit het CWI. GTI's worden verondersteld zeer toegepast, marktgedreven te werken, terwijl het CWI zich op fundamenteel onderzoek richt. Inmiddels ken ik beide werelden van binnenuit. In discussies met financiers speelt de positionering van het onderzoek een belangrijke rol. In die discussies worden allerlei onderzoeksmodaliteiten onderscheiden. De verschillende categorieën worden aangeduid met bijvoeglijke naamwoorden als: fundamenteel, vrij, toegepast, toepassingsgericht, curiosity driven, lange termijn, korte termijn, theoretisch, experimenteel, etc. etc. In de discussies wordt er meestal van uitgegaan dat de categorieën duidelijk zijn te onderscheiden, tegenover elkaar staan en elkaar uitsluiten. Zo staat:

fundamenteel tegenover *toegepast*,

en deze tegenstelling loopt dan parallel met het onderscheid lange termijn versus korte termijn;

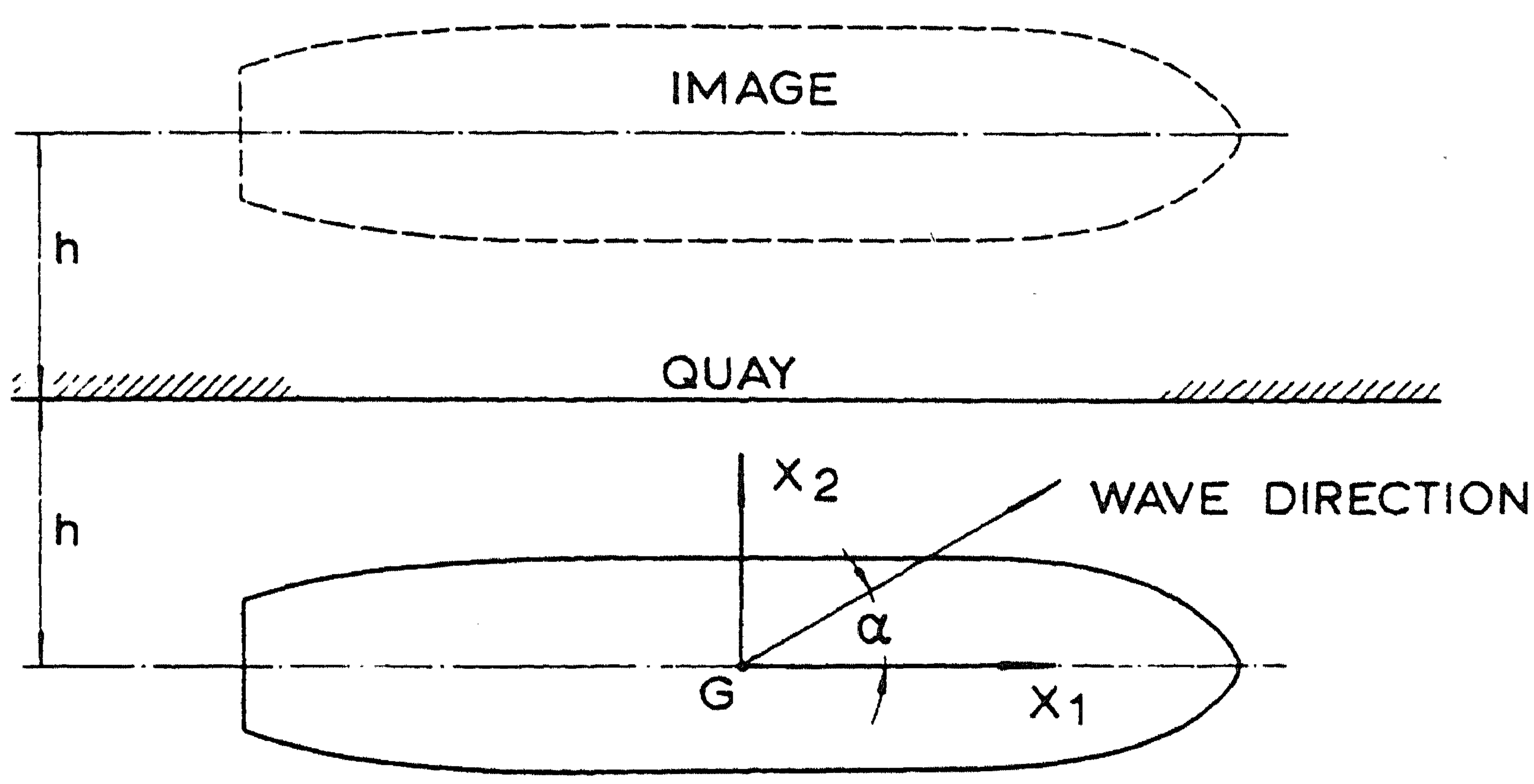
theoretisch tegenover *praktisch*;
theoretisch tegenover *experimenteel*;

Ik kan niet goed uit de voeten met de tegenstellingen die in discussies over onderzoek een rol spelen. Fundamenteel onderzoek kan namelijk heel goed betrekking hebben op problemen die zeer relevant zijn voor de praktijk. Het onderzoeksprogramma van het CWI is daar het levend bewijs van. En wie heeft ook weer gezegd dat niets zo praktisch is als een goede theorie? Praktische, korte termijn problemen blijken soms zó moeilijk dat de oplossing alleen mogelijk is door langdurig en grensverleggend onderzoek, terwijl zeer fundamenteel onderzoek soms ook tot toepassingen op korte termijn leidt. Ook binnen theoretisch onderzoek kan men experimenteren, en fysische experimenten kunnen niet buiten theorievorming. En dat problemen vanuit de praktijk van het bedrijfsleven ook de nieuwsgierigheid van de onderzoeker kunnen prikkelen heb ik zelf vaak mogen ervaren.

Kortom, het onderscheidend vermogen van de verschillende modaliteiten van onderzoek die zoal worden gehanteerd is zeer beperkt. Volgens mij is het met onderzoek net als met muziek en wijn, om bij twee andere passies van Piet te blijven. Je kunt allerlei soorten muziek onderscheiden: klassiek, populair, serieus, etc., en aanhangers van een bepaalde categorie kijken soms neer op de andere soorten. Maar uiteindelijk is er alleen goede en slechte muziek. Goede muziek wekt een emotie op, doet iets met je, of het nu pop of klassiek is. Zo ook met wijn: goede wijn behoeft geen krans, wat voor soort het ook is, en ongeacht de prijs.
Ook bij onderzoek gaat het uiteindelijk om de kwaliteit. Goed onderzoek is per definitie grensverleggend, voegt nieuwe kennis en inzicht toe. Piet van der Houwen heeft in zijn werk laten zien wat goed onderzoek is. Hij paste bovendien prima op het CWI omdat hij zich liet inspireren door maatschappelijk relevante problemen.

In mijn beleving is het onderscheid tussen een GTI als het MARIN en een fundamenteel instituut als het CWI niet zo groot. Hoewel de financieringswijze van een GTI een sterkere externe sturing van de inhoud van het onderzoek met zich mee brengt kan daarbij wel degelijk ook vernieuwend onderzoek van hoge kwaliteit worden uitgevoerd. Ik wil dit illustreren met een voorbeeld uit mijn eigen ervaring. Een voorbeeld dat aantoont dat problemen uit de praktijk ook de nieuwsgierigheid van de onderzoeker kunnen prikkelen, en uitdagende vraagstellingen kunnen inhouden die om diepgaand onderzoek vragen.

Het voorbeeld betreft een onderdeel van mijn promotie onderzoek, waarin ik het gedrag van afgemeerde schepen in havens onderzocht met behulp van CFD (Computational Fluid Dynamics). Een schip is afgemeerd naast een vertikale kade, zoals weergegeven in Figuur 1. Voor de duidelijkheid vereenvoudig ik het probleem tot een beweging met i één vrijheidsgraad, en wel een translatie in het horizontale vlak, loodrecht op de kade.

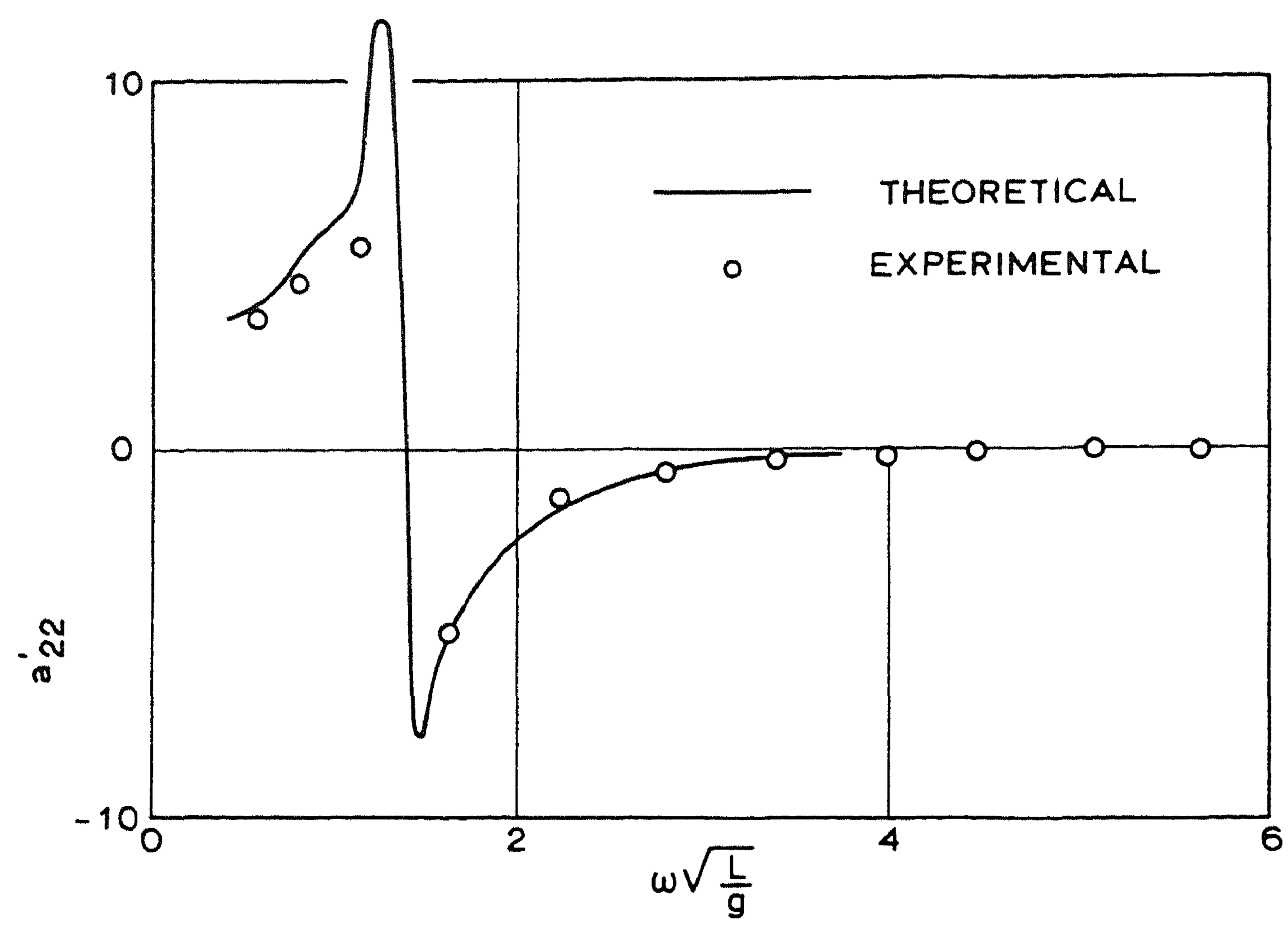


De beweging van het schip kan met de volgende vergelijking, die is afgeleid van de wet van Newton, worden beschreven. Voor een harmonische beweging (amplitude ζ, frequentie ω) onder invloed van golven, geldt:

$$-\omega^2\zeta_2(M_{22} + a_{22})\sin\omega t + b_{22}\zeta_2\omega\cos\omega t = X_2\sin(\omega t + \delta).$$

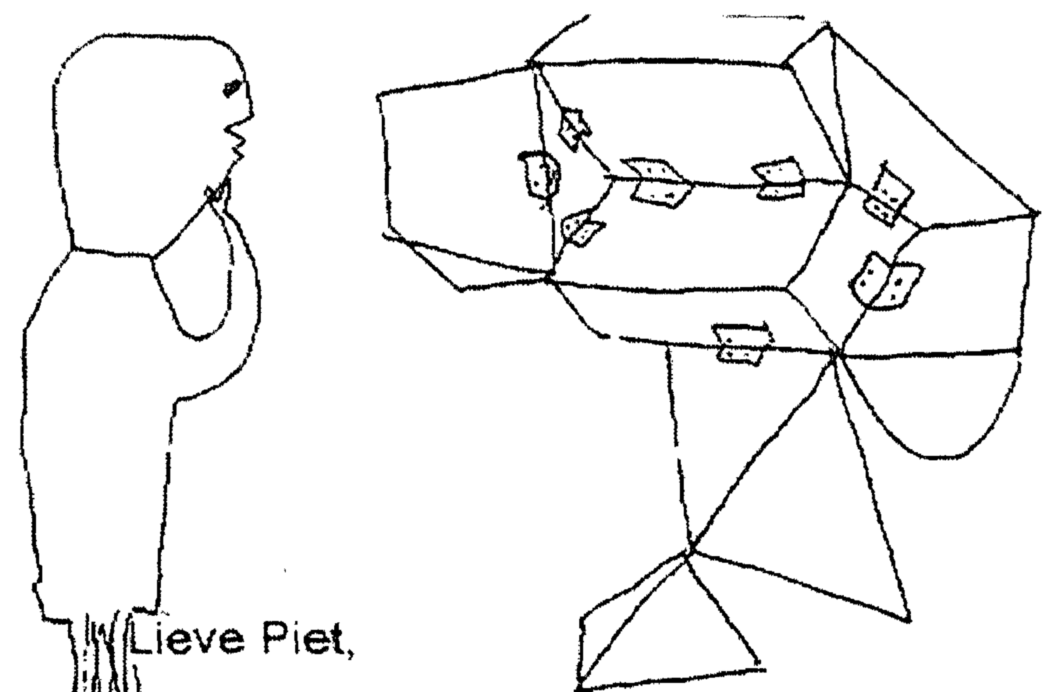
Het rechterlid is de excitatiekracht die de beweging van het schip veroorzaakt, M_{22} is de massa van het schip. De reactiekracht die het water op het schip uitoefent wordt beschreven door een traagheidscomponent met amplitude a_{22} en een dempingscomponent met amplitude b_{22}. De coefficient a_{22} wordt toegevoegde massa genoemd. Men kan zich voorstellen dat het bewegende schip een hoeveelheid water met zich meesleept, en a_{22} is de massa van deze hoeveelheid water. Ik heb de coefficienten a en b voor alle bewegingsfrequenties uitgerekend met een driedimensionale berekeningsmethode. Hierbij wordt gebruik gemaakt van z.g. boundary elements die voldoen aan de randvoorwaarde aan het vrije vloeistof oppervlak. De extra randconditie van de kademuur werd gemodelleerd door het schip te spiegelen ten opzichte van de kade (zie Figuur 1). De berekeningen werden uitgevoerd op een supercomputer

Hierbij vond ik een verrassend resultaat voor de toegevoegde massacoefficient. Zoals te zien is in Figuur 2, bleek die voor bepaalde frequenties negatief te zijn. De eerste reactie was: dat resultaat moet fout zijn. Negatieve waarden waren nog nooit eerder gerapporteerd, en een negatieve "toegevoegde massa" lijkt in strijd met de fysische realiteit.



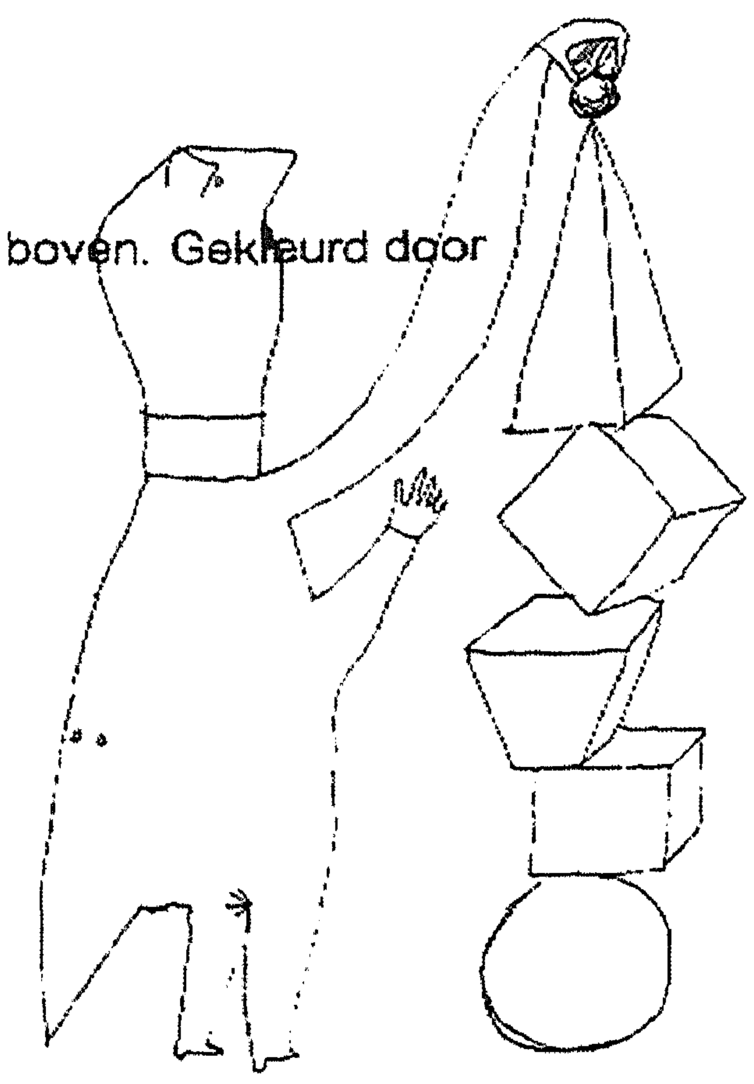
Als volgende stap werden metingen uitgevoerd met een schaalmodel. De experimenten leverden waarden op die in hoge mate overeenstemden met de berekeningen, zoals blijkt uit Figuur 2. Nader onderzoek leerde dat bij de frequenties waarbij de negatieve waarden optraden, een staande golf werd opgewekt tussen de kade en het schip, in de richting loodrecht op de bewegingsrichting van het schip. Die staande golf veroorzaakte een kracht die groter is dan en tegengesteld aan de traagheidskracht veroorzaakt door de "toegevoegde massa" bij een beweging van het schip zonder kade. Het begrip "toegevoegde massa" bleek fysisch misleidend: de term beschrijft het deel van de reactiekracht van het water dat in fase is met de beweging van het schip, en die kracht kan dus ook negatief zijn.

Dit voorbeeld laat zien hoe een praktische situatie, een afgemeerd schip naast een kade, tot een interessante vraagstelling voor onderzoek kan leiden, en hoe een combinatie van theoretisch en experimenteel onderzoek kunnen bijdragen aan de oplossing en een vergroting van het inzicht.



Lieve Piet,

Bij zo'n mijlpaal komen er onherroepelijk herinneringen bij je boven. Gekleurd door een zekere mate van sentimentaliteit. Het zij zo ....



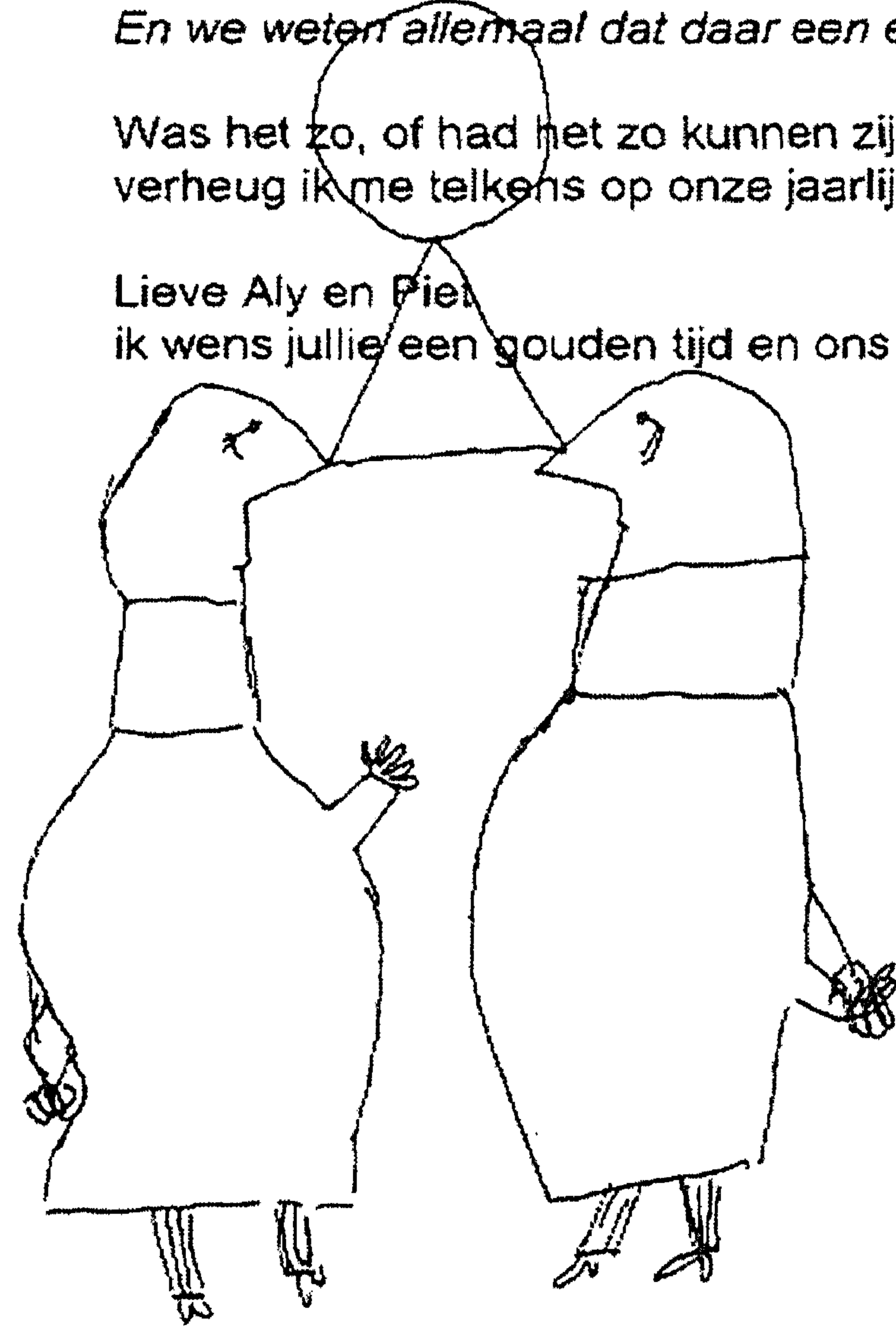
Vijf piepjonge mathematen in Oost
Waren elkander regelmatig tot troost.
Als er een stelling was bewezen
Werd die de hemel in geprezen.
En mislukkingen? Die werden stil geloosd.

Vijf Lauwerierse discipelen in de Boerhaavestraat:
Hard werken en veel tijd voor kattekwaad.
Niet het bewijs van de stelling van Pythagoras,
Waar het trouwens al eeuwen te laat voor was,
Maar het richelkrijten is het waar het om gaat.

Vijf aspirant-geleerden in Amsterdam
Differenti- en integreerden voor hun boterham.
Het is meer dan dertig jaar geleden,
Het was, denk ik, in de Hof van Eeden.
En we weten allemaal dat daar een eind aan kwam.

Was het zo, of had het zo kunnen zijn? In elk geval is de vriendschap gebleven en verheug ik me telkens op onze jaarlijkse etentjes.

Lieve Aly en Piet,
ik wens jullie een gouden tijd en ons negenen nog vele etentjes!



Ria van Ouwerkerk

Themerson

"Een onvermoeide arbeid komt alles te boven"

Het motto van deze bijdrage is niet als aansporing voor Piet van der Houwen bedoeld voor de periode na diens afscheid van het CWI, maar verwijst naar het Wiskundig Genootschap WG). Ingewijden zullen dat ongetwijfeld terstond hebben opgemerkt.

Het Wiskundig Genootschap was de oorzaak van een bijzondere rol, die Piet zou gaan spelen voor de CWI Bibliotheek. De "Boekerij" van het WG was de aanleiding.

Uit een geschiedschrijving uit 1923 genaamd "Het Wiskundig Genootschap, zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn beteekenis voor het verzekeringswezen" door Dr. M. van Haaften (wiskundig adviseur der Hollandsche Sociëteit van Levensverzekeringen te Amsterdam), valt nadere informatie te ontlenen over deze "Boekerij" of bibliotheek.

Het WG werd in 1778 opgericht - volgens sommigen momenteel het oudst nog bestaande genootschap in Nederland. Omdat een belangrijk document, het notulenboek over de periode 1778 – 1788, verloren is gegaan, is over het bestaan van een bibliotheek van het WG in die eerste periode weinig met zekerheid te zeggen. Uit het tweede notulenboek over periode 1798 – 1810, is wel degelijk op te maken dat er iets als een bibliotheek was.
Ook in vroeger dagen werd er overigens geklaagd over dure literatuur. Zo werd opgemerkt in een officieel stuk: "Elk letterkundig genootschap heeft hare bibliotheek, en ons genootschap, hetwelk wegens de excessive duurte van wiskundige werken eene bibliotheek het meest behoeft, heeft eigenlijk niets." Er was dus een bibliotheek, maar die stelde in die periode volgens tijdgenoten blijkbaar niet veel voor en de boeken en tijdschriften waren ook nog onbetaalbaar voor individuele wiskundigen.

Totdat aan het eind van de 19de eeuw de boekerij werd overgebracht naar de bibliotheek van de universiteit [nu UvA genaamd], is er een reeks bibliothecarissen aangesteld geweest, bijv. De Gelder en Mannoury. Door de overbrenging naar de Universiteitsbibliotheek van de collectie, die aanvankelijk qua omvang wel niet erg groot zal zijn geweest omdat de bibliothecarissen deze thuis bewaarden, was een bibliothecaris niet echt meer nodig. De bibliothecaris van de Universiteitsbibliotheek zorgde nu immers voor de boekerij. Dit was het moment, waarop door het WG de bestuursfunctie van Inspecteur van de Boekerij werd ingesteld. D.J. Korteweg was blijkens de geschiedschrijving van Van Haaften de eerste in 1891.

Piet van der Houwen heeft de functie van Inspecteur der Boekerij een aantal jaren bekleed, zoals in 1984. In opdracht van het toenmalig WG bestuur heeft hij er zich toen voor beijverd, om de z.g.n. "lopende" tijdschriftabonnementen, die onderdeel uitmaakten van de boekerij geplaatst bij de Universiteitsbibliotheek, over te brengen naar de CWI Bibliotheek. De redenen voor dit besluit van het WG bestuur waren van praktische aard: een gemakkelijke toegang voor de WG leden zou bij de CWI bibliotheek beter zijn gewaarborgd.
De collectie tijdschriften van het WG werd in belangrijke mate verkregen door ruil met andere genootschappen. Hiervoor werd het tijdschrift "Nieuw Archief voor Wiskunde" gebruikt. De CWI Bibliotheek zou deze ruil nu verder verzorgen. E.e.a. werd in een contract tussen het WG en het CWI geregeld.
De onderhandelingen met de toenmalige bibliothecaris van de Universiteitsbibliotheek over de overbrenging naar het CWI van een belangrijk gedeelte van de boekerij, moeten niet gemakkelijk zijn geweest, hetgeen niet verwonderlijk is gezien de historie. Ik meen, dat al voor 1984 werd onderhandeld, maar Piet van der Houwen's "onvermoeide arbeid" bleek succesvol. In ieder geval was m.i.v. 1985 de collectie tijdschriften in de CWI Bibliotheek geplaatst, wat zowel voor het CWI, het WG en de WG leden een voordelige situatie opleverde.
Ook nu nog in 2000 herbergt de CWI Bibliotheek de "lopende" tijdschriftencollectie van het WG en wordt door de CWI Bibliotheek namens het WG de ruil van tijdschriften met andere genootschappen voortgezet.

Amsterdam, 31 juli 2000,

Frank A. Roos
Bibliothecaris CWI

Lit. "Het Wiskundig Genootschap, zijn oudste geschiedenis, zijn werkzaamheden en zijn beteekenis voor het verzekeringswezen" door Dr. M. van Haaften, Noordhoff, 1923. (Het boek bevindt zich in de z.g.n. "accu-collectie" van de CWI Bibliotheek)

Tussen Alfa en Bèta

Ben Sommeijer

Beste Piet,

In het tijdschrift *Onze Taal*, uitgegeven door het gelijknamige genootschap, wordt regelmatig aandacht besteed aan puzzeltjes, spelletjes en curiosa, uiteraard op het gebied van (de Nederlandse) taal.
Vooral de rubriek van Juul Welling, waarin deze zaken af en toe aan de orde komen, lees ik altijd met veel genoegen. Vaak voel ik me dan uitgedaagd en kan ik het niet laten om zelf aan de slag te gaan met het besproken onderwerp. Dit heeft me al veel plezierige, en leerzame, avonden bezorgd. Hieronder heb ik de onderwerpen die ik het aardigst vond in korte paragraafjes samengevat. Ik hoop dat enkele daarvan jou, als taalliefhebber, ook zullen aanspreken.

Alfametica

In dit taalspelletje worden meerdere woorden 'opgeteld' tot een nieuw woord. Het gaat er om gelijke letters te vervangen door hetzelfde cijfer (en verschillende letters door verschillende cijfers), zodat de optelling ook rekenkundig klopt. Bovendien mag de eerste letter van een woord niet door de nul vervangen worden.
Een paar voorbeelden waarin alle tien de cijfers gebruikt worden:

twintig	2 135 237
twintig	2 135 237
dertig	894 237
dertig	894 237
honderd	6 058 948

Frans	60 817
Noors	13 307
Deens	24 417
talen	98 541

Wiskundigen vragen zich vaak af of een oplossing uniek is. Voor beide bovenstaande voorbeelden is dit niet zo, maar het volgende voorbeeld heeft slechts één oplossing:

brood
boter
thee
ei
ei
———
ontbijt

Voor jou natuurlijk een ‘eitje’.

Een bonte beestenboel

Piet, je hebt me wel eens verteld dat je een verzameling spreekwoorden hebt aangelegd. Spreekwoorden zeggen veel over de historie en de aard van een volk en zijn alleen al om die reden erg interessant. Laten we daarom een paar buitenlandse spreekwoorden bekijken en ons beperken tot die waarin dieren een hoofdrol spelen.
Zo blijken Fransen, Engelsen, etc. vaak een ander soort dierenliefde en -haat te kennen dan wij. Bij de Fransen verandert het verdronken kalf in een paard, de bonte hond wordt een witte raaf en de zingende nachtegaal een leeuwerik. Daar waar spreekwoorden aan de Bijbel of aan de Griekse of Romeinse oudheid zijn ontleend, worden vaak dezelfde dieren ‘gebruikt’: ‘*Wie zich tot schaap hoort*’ zijn overal hetzelfde.
Maar er zijn ook opmerkelijke verschillen: ‘*Oude hazen kennen de stroppen/Put an old cat to an old rat/Alte Ratten sind schwer zu fangen/Vieil oiseau ne se prend à rets*’ is daar een voorbeeld van; of: ‘*Wie zich voor hond verhuurt, moet de botten kluiven/Make yourself all honey and the flies will devour you/Qui se fait brebis, le loup le mange*’. Dat er meer honden zijn die Fikkie heten, wordt in het Frans een ezel die Martin heet. Een ezel kent men aan zijn oren, zeggen wij, maar de Engelsen herkennen een hond aan zijn manier van bijten.

Palindromen

In een stukje over taalcuriosa mogen palindromen natuurlijk niet ontbreken. Palindromen zijn woorden die, van achter naar voor gelezen, hetzelfde opleveren; *lepel* en *parterretrap* zijn overbekende voorbeelden.
Je kunt deze eigenschap natuurlijk ook uitbreiden naar zinnetjes: ‘*koop ik ’n ei, dan nadien kip ook*’, of ‘*panklare bout kookt u, ober, al knap*’. Battus noemt ze, in zijn *Opperlandse taal- en letterkunde*, *symmys* en verzamelde er meer dan 2500. Hierbij hoeft men zich natuurlijk ook niet tot het Nederlands te beperken. Op de rand van een waterbak in Constantinopel stond: ‘*νίψον ἀ νομήματα μὴ μόναν ὄψιν*’ (was je zonden, niet alleen je gezicht).

Een ander prachtig voorbeeld (van Leigh Mercer) is: '*A man, a plan, a canal – Panama*'. De Nederlandse zinnetjes '*Droog is Rome, 't te hete, het te morsig oord*' en '*Steeds in ere, heren, is de ets*' voldoen aan de voorwaarden, maar halen toch niet het 'Panama-niveau'.

Alleen aan de wandel

(i) *Alleen* hij zei dat hij van haar hield.
(ii) Hij *alleen* zei dat hij van haar hield.
(iii) Hij zei *alleen* dat hij van haar hield.
(iv) Hij zei dat *alleen* hij van haar hield.
(v) Hij zei dat hij *alleen* van haar hield.
(vi) Hij zei dat hij van *alleen* haar hield.
(vii) Hij zei dat hij van haar *alleen* hield.
(viii) Hij zei dat hij van haar hield, *alleen* ...

Het volmaakte woord

In de getaltheorie noemen we een getal *volmaakt* als het gelijk is aan de som van zijn delers (behalve het getal zelf). Het eerste volmaakte getal is 6, want 6=1+2+3; de volgende volmaakte getallen zijn 28 (=1+2+4+7+14), 496, enz. Bestaat er zoiets nu ook in de taal? Laten we met een zesletterwoord beginnen, met driemaal '*a*', tweemaal '*b*' en éénmaal '*c*', waarbij *a*, *b* en *c* willekeurige letters mogen zijn. Oplossingen te over: *acacia, banaan, dennen, doodop, eenden, rococo, sessie,...* .
Bij 28 letters wordt het al veel lastiger en wijken we uit naar een de 'volmaakte zin'. Het ligt voor de hand om voor de letter die 14 maal voor moet komen de *e* te kiezen. Met 7 maal *d*, 4 maal *r*, 2 maal *n* en 1 maal *m*, komen we tot '*En de reder deed mee en redde de eer*'. Er zijn ook voorbeelden bekend met de *a* op 14 en zelfs met de *o* op 14. Eenmaal heb ik een 'volmaakt verhaal' gezien bestaande uit 496 letters. Een beetje te lang om hier op te nemen. Wellicht kan een geïnteresseerde lezer er zelf één verzinnen.

Oplopers

Nauw verwant aan het volmaakte woord is de *oploper*, een woord waarin een bepaalde letter slechts éénmaal voorkomt, een andere letter tweemaal, een derde driemaal, enz. De drietrapsvariant is tevens *volmaakt* (zie vorige paragraaf).
Als viertraps-oplopers (met 10 letters, dus) kunnen we noemen: *ananassaus, baarddraad, leeslessen, maanmannen, negergenen, theetenten, veevervoer,...* .

De vijftraps-oploper (met 15 letters) wordt al wat gekunsteld: *neerdonderenden, rododendronrood, vervoerreserves,...*, hetgeen zeker geldt voor de zestraps-oploper (met 21 letters) *riviervisserijsessies* (beetje smokkelen door de *ij* als twee letters te tellen), *sterrenstelseltesters, toneeltentoonsteltent,...* . Wie nog langere oplopers wil hebben, moet ze zelf maar verzinnen.

Topogrammen

Hierbij gaat het om toponiemen die een anagram zijn van een andere plaats in Nederland. Laten we eenvoudig beginnen; voor zover mij bekend zijn *Ens-Nes* en *Loo-Ool* de enige topogrammen met drie letters. Met vier letters zijn er al heel wat meer: *Berm-Brem, Drie-Ried, Edam-Made, Heel-Lhee, Heer-Rhee, Hert-Reth, Keer-Reek, Kiel-Klei, Nude-Uden, Olst-'t Sol.* Hiermee lijkt me de lijst met 4-letter topogrammen compleet.
We gaan nog even door en zoeken naar n-letter topogrammen, met n minstens 5. En inderdaad, die zijn ook wel te vinden. Om ook wat voor de lezer over te laten, zal ik, voor $n = 5$ t/m 10, steeds één voorbeeld noemen:
$n= 5$ (18 oplossingen bekend): *Elsen-Leens-Sleen* (een drietrapsvariant !)
$n = 6$ (27 oplossingen bekend): *Holten-Tholen*
$n = 7$ (7 oplossingen bekend): *Angeren-Nergena*
$n = 8$ (8 oplossingen bekend): *Elsteren-Netersel*
$n = 9$ (4 oplossingen bekend): *Eckelrade-Ledeacker*
$n = 10$ (5 oplossingen bekend): *Diemerbrug-Muiderberg*

Voor lezers die er nog niet genoeg van hebben en hun grenzen willen verleggen, is hier alvast een beginnetje: *Halsteren* (Ned.)-*Herentals* (Belg.) en *Orleans* (Fra.)-*Salerno* (Ital.).

Heel Amsterdam Hapert

Nu we toch de atlas erbij hebben vanwege het vorige stukje, kunnen we meteen doorgaan met de volgende opgave: maak zinnen met louter Nederlandse plaatsnamen.
Behalve de titel van dit stukje zouden we nog kunnen noemen '*Wouw Best Rijen*' en '*Oude Zeug Rolde Koedood*'. Al wat langer is '*De Vrolijkheid Achter Het Klooster Duurde Voort*'. En wat te denken van het volgende verslag van een voetbalinterland: '*Nederland Opende Heel Best. Oranje Schoot Gauw Achtmaal. Paal Weerde Numero Een. Halfweg Stokt Partij, Gouden Ploeg Hapert. Wissel Oude Willem Leek Uitweg. Helden Vechten Voort. Drie-Een*'. Een amusant curiosum; de topografie van ons land levert voldoende materiaal voor nog veel meer varianten.

Naamlipogrammen

Wat is er bijzonder aan de naam *Anna Blaman*? Dat er slechts één klinker, de *a*, in voorkomt, maar wel viermaal zonder dat een andere klinker roet in het eten gooit. Deze naam staat in Battus' lijstje van *a*-namen van bekende Nederlanders. Kan het langer? Jazeker, *Barbara Graas*, vijfvoudig damkampioene in de jaren 70, zet het record op 5, evenals *Marga van Praag*. En hoe zit het met de andere klinkers? Het vervolg van het lijstje van Battus ziet er zo uit: voor de *e*, *Peter Verstegen*(5), voor de *i*, *Frits Philips*(3) en voor de *o* voert *Toon Kortooms* met 5 de ranglijst aan.
Opnieuw de vraag: zijn er 'langere' bekende Nederlanders? Sinds *Heleen de Greef* in 1984 en 1986 schaakkampioene werd, is zij een bekende Nederlandse en is Peter Verstegen verslagen. De *i*- en *o*-categorie zijn niet zo makkelijk te verbeteren en over de *u* hebben we het nog helemaal niet gehad. *Luc Lutz* zou kunnen, maar met voornamen als *Truus*, *Ruud* of *Guus* zou je toch denken dat er meer in moet zitten (jammer van dat '*ers*' bij *Ruud Lubbers*). Wie biedt meer?
In NRC Handelsblad van 23 juli 1996 stond een stukje over *Lynyrd Skynyrd*, de naam van een tamelijk legendarische Amerikaanse popgroep. Niet echt een 'bekende Nederlander', maar voor zo'n moeilijke letter als de *y* mag deze naam, buiten mededinging weliswaar, toch wel vermeld worden, vind ik.
Hetzelfde geldt voor *Müslüm Gündüz*, leider van een islamitische Aczmendie-sekte (NRC, 8-1-1997).

Omniplurialen

Als we de Griekse y even tot de medeklinkers rekenen, dan kent ons alfabet 21 medeklinkers en 5 klinkers, de *a*, *e*, *i*, *o* en *u*. Een (omni)pluriaal is een woord met (zo) veel (mogelijk) verschillende medeklinkers. Het woord *schaakverzameling* is een echt pluriaal, met 11 verschillende medeklinkers. Met het verkleinwoordje '*-etje*' erachter wordt het zelfs nog twee medeklinkers langer. Daarmee zitten we dus al op 13. Met de meervoudsvorm winnen we niets, want de *s* hebben we al gebruikt. Maar het moet toch beter kunnen?
Naast plurialen, noemen we *omnialen*: woorden waarin alle vijf de klinkers maar één keer voorkomen, zoals: '*autowiel, burocratie, crematorium, metroviaduct* , enz.
De echte taalcuriosafanaat wil nu natuurlijk een combinatie: het pluriaal dat tevens omniaal is. Ook deze bestaan; *campinghoudster, palingvrouwtjes* en *sandwichformule* zijn slechts enkele voorbeelden, alle met 10 medeklinkers. *Schaduwbegroting* (met 11) en *landbouwgeschrift* (met 12) doen het al beter.
De vraag is natuurlijk: kan dit nog verbeterd worden?

Op de wijze van De Wijs

In deze bijdrage voor jouw *Liber Amicorum*, Piet, is spelling een belangrijk onderwerp geweest. Jammer is, dat het ingeburgerde spellingalfabet zo vreselijk saai is. Daarom wil ik deze bijdrage afsluiten met het voorstel het huidige spellingalfabet te vervangen door het volgende alternatief van Ivo de Wijs:

de A van Zeg 'ns
de B van Mol
de C van Buddingh'
de D van Ik dee niks, ik dacht dat hij wat
de E van Gelie
de F van Gulden
de G van Krant(gay)
de H van Lachen
de I van Rebroff
de J van Minee
de K van Anker
de L van Meester Pennewip
de M van Libresse
de N van Datteme toffe jongens zijn
de O van Kom er is kijken
de P van Doctorandus
de Q van Maar welke chocoladeletter heeft u dan eigenlijk wél?
de R van Door
de S van Andrée
de T van Van Nelle
de U van Jullie
de V van Churchill
de W van Ach
de X van Er ligt hier een schat begraven
de Y van Columbus
de Z van Timman.

Beste Piet,

Mijn eerste gedachte over jou gaan over servetjes. Tijdens de lunch in de CWI kantine werd over van alles gesproken, en dus ook over Numerieke Wiskunde. Eenmaal op dit onderwerp belandt, verschenen vrij snel de eerste formules op de servetjes. Terwijl ik altijd heb gedacht dat de servetjes in de kantine een ander doel dienden.

Hoewel je mijn promotor was, heb ik in de vier jaren dat ik OIO op het CWI was, niet heel veel met jou samengewerkt. Immers, in het CIRK-project kwam de dagelijkse begeleiding van Jan Verwer en Willem Hundsdorfer. Het valt trouwens op hoeveel promovendi van jou hun proefschrift binnen de geplande vier jaar afronden. Dat heeft zeker te maken met de aandacht die de vaste staf besteedt aan de jonge onderzoekers. Dit is zeker niet vanzelfsprekend: het landelijke beeld is heel anders.

Verder herinner ik me een afdelingsvergadering waar nogal veel OIO's verstek lieten gaan. In plaats van je daar druk over te maken, constateerde je dat zij vast nuttiger bezig waren.

Dan kom ik op mijn promotie terecht. Een promotie is tegenwoordig vaak een afscheid. Sowieso laat je een periode van ongeveer vier jaar achter je, waarin je je volledig op het onderzoek kon storten. Vaak ook ga je een andere werkkring zoeken. Nu leven we in een tijd waarin er meer dan genoeg werk is, maar dat wil helaas nog niet zeggen dat het eenvoudig is om leuk werk te vinden. Bij mijn promotie zei je dat het logischer was geweest als ik aansluitend een post-doc positie had aanvaard op het IMAU. Ik koos daar dus niet voor. Hoewel ik ruim een jaar later wel op het IMAU terecht kwam, ben ik blij dat ik eerst een tijdje in de IT heb gewerkt. Ik heb daar een ontwikkeling doorgemaakt, die ik in academische wereld in ieder geval niet zo snel zou hebben meegekregen. Daarbij denk ik dan niet alleen aan opties, snelle pakken en dito lease-auto's, maar vooral aan de gestructureerde wijze waarop programmatuur gebouwd kan worden, en de kwaliteitswaarborgen die beschikbaar zijn. En natuurlijk zie je hoe daar (vaak) door gebrek aan tijd, geld en ervaring in de praktijk mee om gegaan wordt. Ervaringen die ik in mijn nieuwe baan bij Rijkswaterstaat/RIKZ goed kan gebruiken.

Het woord afscheid liet ik al gevallen. Nu je met vervroegd pensioen gaat wens ik je toe dat je nog lang mag genieten van het goede dat het leven te bieden heeft!

Edwin Spee
27 juli 2000

De Pap der Wetenschap

De nestor van NW
pikte menig krentje mee
uit de pap
der wetenschap

Menig conferentie werd bezocht
alwaar Piet de wijn uitzocht
Hij sprak zijn numerieke woorden
bij voorkeur in culinaire oorden

Maar de pap werd ook verrijkt
zoals uit zijn werken blijkt
Om sneller te schrijven dan God kan lezen
hoef je geen Vestdijk te wezen

Piet is niet te Houwen
bij het Runge-Kutta's bouwen
Terwijl de ene werd beschreven
begon de volgende te leven

Als hoogleraar
stoomde hij vele promovendi klaar
door op de achtergrond te blijven
en stiekem hun boekjes vol te schrijven

Ze leerden om numeriek te zijn
en ook veel van wijn
en met je proefschrift komt het goed
als je daar geen water bij doet

Schrijver dezes heeft zo veel geleerd
en dit heeft niet alleen geresulteerd
in een numeriéke bul met lak
maar ook in één op persoonlijk vlak

Jacques de Swart

Bravo, Piet!

Beste Piet,

de volgende gebeurtenis heb je zelf aan me toevertrouwd, en alle details zijn me niet bijgebleven. Maar de "story" karakteriseert een van je liefhebberijen zo precies dat ik er graag een bijdrage mee wil leveren voor dit Liber Amicorum.

Je vertelde dat je eens met Aly in een restaurant op een belendende tafel een fles wijn zag staan die je zelf graag had willen bestellen, maar die misschien buiten je begroting viel. Nadat je de genoegens aan de andere tafel had moeten verduren bleek tot je stomme verbazing dat de gasten de fles niet hadden leeggedronken en dat er nog een behoorlijke rest was achtergebleven.

Er was in elk geval genoeg voor je om de moed te verzamelen op te staan en tot afgrijzen van Aly, die zich behoorlijk geneerde voor je euvele daad, de fles van de tafel naast je te grissen en zo je eigen maaltijd met extra genoegen af te sluiten. Bravo! Dit is de genieter in volle glorie.

"Remainders" schatten en fouten controleren is ook een sterk punt in je wetenschappelijke carrière als numericus geweest, en ik kan ook alleen maar met waardering spreken over je wetenschappelijke werk. Je hebt vanaf het begin op het MC grootschalig rekenen beoefend, te beginnen met het "Noordzeeprobleem". Je werkte hier al aan in de zestiger jaren op de X8 en geleidelijk aan heb je een school opgebouwd waarvan de resultaten nog dagelijks waarneembaar zijn op het CWI, maar ook buiten ons instituut. Ook hier: Bravo!.

De afdeling Numerieke Wiskunde is onder jouw leiding altijd een vaste burcht geweest, waarvan de plannen in de Adviescommissie steeds met waardering besproken werden, hoewel er meer discussie over was dan over de plannen van de afdeling Toegepaste Wiskunde. Lauwerier wist zijn leeftijdgenoten in de commissies, zoals Veltkamp en Zandbergen, altijd snel om de vinger te winden, maar jij lag vaker onder vuur. Ik heb Cor Baaijen na zo'n vergadering wel eens horen opmerken dat het NW-programma altijd perfect in elkaar stak en dat hij er geen vinger achter kon krijgen.

Ik wens jou met Aly nog veel genoegen toe in het volgende traject van jullie leven.

Nico.

J.G. Verwer, De Wildtlaan 21
1852 CJ Heiloo, Tel. 072-5330248

20 juli 2000

Beste Piet,

Een afscheid roept herinneringen op en wat jou betreft zijn dat er veel, teveel om ze allemaal de revue te laten passeren. Ik zou bijvoorbeeld onze gezamenlijke publicaties kunnen memoreren, de congresreizen die we samen hebben ondernomen naar Dresden, Halle en Moskou, of mijn begintijd op het MC aan de 2de Boerhavestraat in 1973. Ik zal me tot mijn begintijd beperken.

Als stagiair kwam ik bij je binnen op het moment dat onder jouw leiding het onderzoek naar numerieke methoden voor stijve differentiaalvergelijkingen net goed op stoom lag. Zowel binnen als buiten Nederland behoorde jij in die beginjaren tot de gangmakers op dit gebied. Als een nog jong onderzoeker werd mij dat duidelijk toen je in het voorwoord van de eerste toonaangevende proceedings over "Stiff Differential Systems" werd gerekend tot "the principal investigators on research projects in stiff systems". Het werd me overigens nog duidelijker toen je me in die tijd op zeker moment vertelde dat je een boek aan het schrijven was en voorstelde dat ik je gehele manuscript maar moest gaan lezen, van commentaar voorzien, en corrigeren waar ik kon. Zo'n eervol verzoek kon ik natuurlijk niet weigeren. Met jouw boek als een van mijn voornaamste bakens ben ik toen verder gegaan op het onderwerp "Stiff ODEs", met als resultaat mijn promotie eind '77 en jij je eerste promovendus in je hoedanigheid van (pas benoemd) bijzonder hoogleraar in de numerieke wiskunde aan de UVA.

Ondanks het feit dat een destijds invloedrijke Nederlandse wiskundige van mening was dat er eind jaren zeventig genoeg numerici bij het MC onderdak hadden gekregen, heb jij enige tijd na mijn promotie weten te bewerkstelligen dat mij een vaste aanstelling werd aangeboden binnen de toen kort geleden opgerichte afdeling Numerieke Wiskunde waarvan jij als hoofd was benoemd. Ik heb dat aanbod met graagte aanvaard en heb daar tot op de dag van vandaag geen moment spijt van gehad. Zeker is dat jij daar in je hoedanigheid van langdurig hoofd van deze afdeling in belangrijke mate toe hebt bijgedragen. Ik dank je zeer voor de vele jaren van uitstekende en plezierige samenwerking en wens je, mede namens Tineke, samen met Aly een gelukkige en zeer langdurige pensioentijd toe.

Hartelijke Groeten, Jan

Een crypto voor Piet

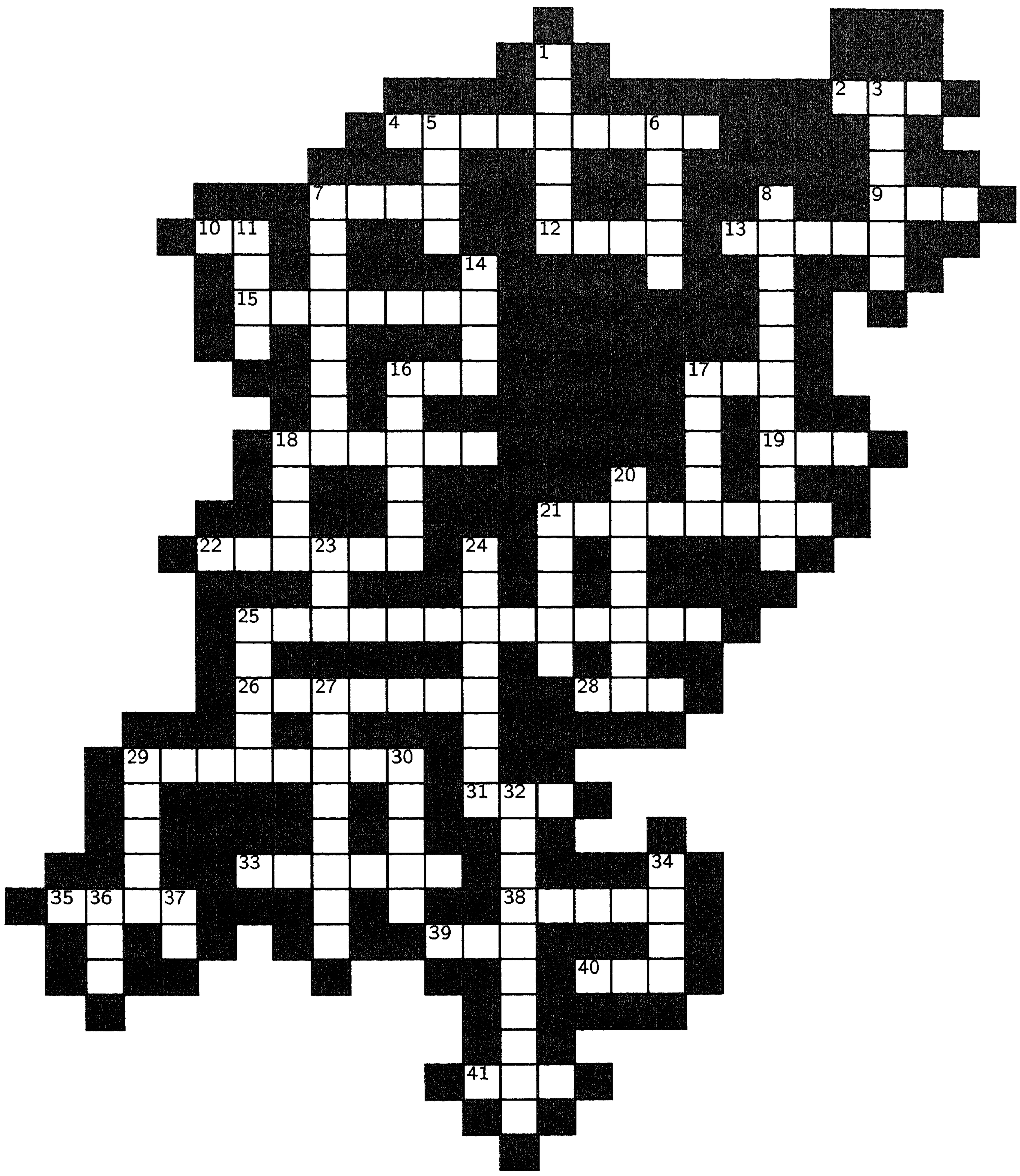
Beste Piet,

In de tijd dat ik voor de afdeling Numerieke Wiskunde werkte, heb ik veel nieuwe wiskundige begrippen geleerd. Tevens passeerden veel namen de revue. Die begrippen en namen zijn altijd blijven hangen. Bovendien heb ik op het CWI vaak met LaTeX gewerkt. Deze gegevens heb ik nu verwerkt in een cryptogram voor jouw afscheid. De crypto is gemaakt in LaTeX (waar zoals gewoonlijk Walter mij mee heeft geholpen ...) en de omschrijvingen c.q. oplossingen slaan op namen en begrippen die ik door de jaren heen voorbij heb zien komen. Succes!

Simone van der Wolff

Horizontaal 2 Belangrijk Erg Persoon 4 Knapt hij de Philips-gebouwen op? 7 Gepromoveerde grondsoort 9 Hier werkt het ook terug 10 Voormalige nieuwe afdeling? 12 Krijgt zij salaris met terugwerkende kracht? 13 Promovendus met bewijs van goed gedrag 15 Deze man maakt getallen koud 16 Klinkt anders als dagelijkse vergelijkingen 17 Perverse programmeertaal 18 Verzorgde hij de lunch? 19 Lofzang op vergelijkingen 21 Een Piet op dunne pootjes 22 Je kan hem keren in MAS 2 25 De voormalige groep van sommen 26 Het lijkt alsof hij zonder elektriciteit zit 28 Bij welk cluster zit Sam anders? 29 Verloopt de samenwerking in een sterrenhemel? 31 Numerieke Wiskunde is Niks? 33 Mark slaat 'm op z'n kop 35 Tijdschrift voor videocamera's? 38 U heeft takt bij 16 verticaal 39 Lijken op afgekorte Zweedse vergelijkingen 40 Geleerd licht 41 Is deze vrouw reeds op de verticale as?

Verticaal 1 Gaat de samenwerking met hem telefonisch? 3 Hij komt anders in verweer 5 Betekent dit in Vietnam 'Ah Yes!'? 6 Familie van Van Liere? 7 Veel grondkleur 8 Knallen in het bos 11 Wetten op de Universitaire Bestuurshervorming? 14 Mooi gedrag 16 Dirk en Kees op het dak 17 Amsterdams kleurtje 18 Heeft zij regelmatig water nodig? 20 Zet zij anders het mes in de letter a? 21 Verzorgt hij pasgeboren wiskunde? 23 Fopt en bakt 24 Wiskundige van Duitse adel? 25 Deze wiskundige doet in geur(e)n 27 Rekenopgave met *f* 100,00 29 Racehond 30 Oude programmeerleeuw 32 Pakt zich samen boven de kim in Den Helder? 34 Deze secretaresse is niks 36 Programmeertaal op een wetenschappelijk instituut 37 1.100 jaar oud centrum



Samenwerken met Piet, ... dat vergeet je niet !!

Toen ik door Herman te Riele werd benaderd met de vraag of ik een bijdrage wilde te leveren aan een Liber Amicorum voor Piet van der Houwen, hoefde ik niet lang na te denken. Een impulsief "Ja natuurlijk, graag zelfs" was mijn antwoord. Vervolgens moest ik nog een geschikt onderwerp zien te vinden. Ik wilde geen wetenschappelijke bijdrage leveren, maar liever een stukje formule-loze tekst. Het moest antwoord geven op de vraag: "welke indrukken heeft Piet bij mij achtergelaten?". Na enig nadenken kwam het samenwerken met Piet in vele facetten in mijn geheugen boven borrelen.
De periode waarover ik vertel, ligt tussen januari 1977 en oktober 1981. Het feit dat dit ruim 20 jaar geleden plaatsvond is er de oorzaak van dat ik de namen van personen en plaatsen niet in alle gevallen meer paraat heb, waarvoor mijn excuses. Ik hoop in ieder geval dat het jou, Piet, nog bekend voorkomt.
Het begon allemaal op 2 januari 1977 toen ik in dienst trad bij de afdeling Numerieke Wiskunde van het Mathematisch Centrum in de 2de Boerhaavestraat. Mijn kamer bevond zich op de bovenste verdieping met uitzicht op (en tevens de geur van) de Amstel-brouwerij. Piet was chef van de afdeling en zette mij op het onderwerp 'delay differential equations'. Na een grondige literatuurstudie waarbij ik een grote mate van vrijheid genoot, had ik na een half jaar een dikke klapper met interessante artikelen en kende "the state of the art" op dat gebied, maar ik had zelf nog steeds geen grensverleggende ideeën. Er kwam eigenlijk niets van de grond. Piet, jij stelde toen voor om samen eens te kijken naar Volterra integraalvergelijkingen, een onderwerp waarover jij een aantal ideeën had vastgelegd in een onderzoeksnotitie. Ik weet nog goed dat vanaf dat moment mijn promotie-onderzoek begon te lopen. In mijn beleving werd er door jou een sfeer van competitie geschapen, waarbij wij over en weer met nieuwe ideeën kwamen die vervolgens door mij of door jou kritisch werden bekeken en van commentaar werden voorzien. Dit brainstormen was een manier van werken die mij ongelofelijk motiveerde en inspireerde. Of jij deze manier van aanpak doelbewust hanteerde of niet, doet er niet zoveel toe: in mijn geval was hij uiterst doeltreffend.

Jouw leiderschapstijl was die van een Primus Inter Pares. Jij gaf het voorbeeld op een manier die in zekere zin navolging gebood. Jij werkte hard, ook zaterdags en de zondagochtenden. Ik ging dat ook doen. Donderdags werkte je thuis, zodat ik en ook andere collega's op vrijdag werden overspoeld met de uitwerkingen van ideëen, meestal met een zwarte dunschrijver aan het papier toevertrouwd.
Piet, de samenwerking met jou was voor mij inspirerend en motiverend. Jouw ideëenstroom wakkerde mijn creativiteit aan en jouw energie verstoorde soms indirect mijn nachtrust. Maar voor alle duidelijkheid: ik heb er zeer goede herinneringen aan. En tot zover in vogelvlucht enkele van jouw in het oog springende kwaliteiten op het professionele vlak.

Op het sociale vlak maakte ik en ook Lina kennis met jou en Aly tijdens gezellige dinertjes in de kelder van jullie huis, soms in groot gezelschap soms wat intiemer met zijn vieren. Met klassieke muziek op de achtergrond en een heerlijke wijn op de tafel. Ik leerde je nog veel beter kennen tijdens de maand april van het jaar 1979. Jij en ik waren toen 'gedetacheerd' bij de University of Manchester op uitnodiging van Christopher Baker om een door de Britse SRC gesponsord artikel te schrijven. Wij waren gehuisvest in een buitenwijk van Manchester in een statig en rustig gelegen herenhuis, waarvan ik mij de naam helaas niet meer kan herinneren. Wel herinner ik mij de vaak formele sfeer voor, tijdens en na het diner. Wij zaten aan een grote tafel met ongeveer 12 personen (merendeels wiskundigen), werden keurig bediend en voorzien van een goede maaltijd en genoten in de zitkamer voor de open haard van de after dinner koffie. Het geheel deed wat stoffig 19de eeuws aan, maar het gaf wel een adelijk gevoel. Gelukkig hadden we de beschikking over de auto nadat wij Aly als voetpassagier op de ferry Hull-Rotterdam hadden gezet. Dit vervoermiddel kwam ons goed van pas in het tweede weekend. Wij bezochten toen het Lake District. We reden via Penrith en Keswick in zuidelijke richting en kwamen terecht Ambleside. Tijd voor een stevige wandeling. Ondanks een redelijke conditie had ik grote moeite om jouw looptempo bij te houden. De heuvel verderop zou volgens jou een geweldig uitzicht geven en na ruim een uur (steepest gradient) klimmen bleek dat jij gelijk had. Daar zag je nog meer toppen die je wilde onderzoeken. Helaas voor Piet, gelukkig voor mij naderde het eind van de middag en zochten wij een B&B-onderkomen. Na een voortreffelijke maaltijd, een bezoek aan enkele pubs en een zeer goede nachtrust, gingen we zondag door met de verkenning van het Lake District. Voor mij, gewend als ik was aan

ontspannen strandvakanties, was dit destijds een heel bijzondere ervaring. De intensiteit van activiteiten deed mij denken aan Amerikanen of Japanners die in een week tijd "Europa doen". Piet, ik heb jou toen leren kennen als een zeer sociale, energieke, onvermoeibare levensgenieter.
Tot besluit wens ik jou en ook Aly het allerbeste in de komende fase van jullie leven. Moge het jou en Aly voor de wind gaan, in een goede gezondheid. Geniet er van, je weet als de beste hoe dat moet!! Bedankt voor de plezierige en leerzame samenwerking. Het was voor mij een unieke ervaring.

Paul Wolkenfelt

Deel II

Wetenschappelijke bijdragen

Volterra integral equations at MC and CWI: 1976 to 2000

Hermann Brunner
Dept. of Mathematics and Statistics
Memorial University of Newfoundland
St. John's, Newfoundland
Canada A1C 5S7
hermann@math.mun.ca

Dedicated to my friend Pieter van der Houwen:
with my best wishes on your retirement

1 Numerical Volterra integral equations, *ca.* 1976

From October 1976 to February 1977 the Afdeling Numerieke Wiskunde at Mathematisch Centrum ran a monthly colloquium on numerical methods in ODEs and PDEs, linear programming and optimization, approximation theory, and *integral equations*. The resulting MC Syllabus 29.2 ([2]) contains two extensive contributions – both nice blends of survey and new research – by Pieter van der Houwen (on second-kind Volterra integral equations) and by Herman te Riele (on first-kind Fredholm and Volterra integral equations). As I will describe in Section 2 below, these two articles not only comprehensively assess the "state of the art" in the numerical treatment of Volterra integral equations but also give a "preview" of the research in this area to be carried out at MC (and later CWI) in the years to come.

In order to view the significance of numerical VIE research at MC/CWI in a proper perspective, I will first look briefly at what had happened in this field of Numerical Analysis in the approximately fifty years before the MC group decided to enter it. Details and additional references may also be found in [49].

- The year 1924 saw the publication of the first paper [62], by G. Prasad, on the numerical solution of Volterra integral equations (numerical as opposed to Whittaker's slightly earlier approach of approximating the kernel of a VIE and solving the approximating equation analytically). Prasad adapted ODE methods (the linear multistep methods of Bashforth and Adams of 1883, together with the related Gregory quadrature rules, and Kutta's 1901 explicit 4-stage method of order 4) to second-kind VIEs of the from

$$\phi(x) = f(x) + \int_a^x K(x,\xi)\phi(\xi)\, d\xi, \quad x \in [a,b], \qquad (1.1)$$

where f and K are given continuous functions.

- The first convergence analysis for numerical approximations to the solution of (1.1) was given by Sh.E. Mikeladze [63] in 1935: his methods are based on the Gregory rules and the Euler-Maclaurin formula. The analysis is carried out for general quadrature methods, and we find already as the main tool the "Volterra form" of the well-known discrete Gronwall inequality for ODEs.
- In 1949 ([64]), V.I. Krylov discussed, among other methods, the use of block methods (of orders two and four) for generating the necessary starting values for direct quadrature methods (based again on the Gregory rules) for VIEs; however, no error or convergence analysis is given.
- In 1952, in a largely overlooked paper [65] Y. Suyama and K. Nakamori derived the order conditions for explicit 4-stage Runge-Kutta type methods for second-kind VIEs (using the Taylor series approach). (We note in passing that the general Runge-Kutta theory for Volterra integral equations of the second kind, extending Butcher's theory of rooted trees, was established only some 30 years later by Brunner and Nørsett in 1980, and by Brunner, Nørsett and Hairer in 1982.)
- The well-known paper [66] by L. Fox and E.T. Goodwin dates from 1953: it deals in detail with the application of Gregory quadrature methods to second-kind VIEs, with starting values generated by Taylor's method; there is no convergence analysis, and the authors were seemingly not aware of the work by Mikeladze and Krylov.
- In his 1961 paper [67] (on the use and the convergence properties of the trapezoidal rule for VIEs of the second and first kind), J.G. Jones states that *" adequate discussions of the convergence of such numerical [quadrature] methods appear to be lacking"*, furnishing the motivation for his paper – only the second to deal with a convergence analysis for numerical VIEs. (Again, Mikeladze's paper [63] is not listed in the bibliography.)

This would soon change: the later 1960s brought a more systematic approach to the numerical solution and the analysis of numerical methods for VIEs:

- P. Pouzet presented a detailed study of the approximation properties and the numerical performance of a class of explicit Runge-Kutta methods for second-kind VIEs and for Volterra integro-differential equations (VIDEs) in his 1962 thèse and in his celebrated 1963 paper [68]. These works generalized and unified earlier work by E. Aparo (1959), H. Oulès (1960), and himself (1960). A Pouzet VRK method is completely described by the parameters (soon to be called the Butcher array) of a Runge-Kutta method for ODEs.

- In 1965, B.A. Bel'tyukov (who knew Pouzet's 1960 paper) introduced a different class of Volterra-Runge-Kutta methods which are less of "ODE character" (see Chapter 4 in [50] for details); in particular, for a given number of stages a Bel'tyukov method uses fewer kernel evaluations than a Pouzet method. However, the construction of higher-order (implicit) Bel'tyukov methods is much more complex and still not fully understood.

- Since many of the VIE methods were adaptations of ODE methods, it was only a matter of time before the Dahlquist-Henrici theory of linear multistep methods (LMMs) was extended to second kind VIEs. This was done in 1966 by M. Kobayasi [71]. At around the same time – in 1963 and 1967/68 – B. Noble [69] and P. Linz [72, 73] began their general analyses of LMMs for second-kind VIEs. Linz also showed that if "classical" quadrature rules of order greater than two are applied to first-kind VIEs then – rather surprisingly – the resulting numerical method is divergent. (The question on the existence and the construction of higher-order LMMs for first-kind VIEs was only answered in the 1970s and, in a unified way, at MC by P.H.M. Wolkenfelt ([31]) in the early 1980s; see also Section 2 below.)

The publication in 1971 of the seminal book by R.K. Miller [75] on the theory of nonlinear VIEs was a major factor in creating wider interest in the numerical analysis of VIEs. Further milestones were the 1974 book [76] by L.M. Delves and J. Walsh (collecting lectures given during a 1973 summer school at Manchester and Liverpool) and the monograph [77] (see Chapter 6) by C.T.H. Baker. The former, especially Chapter 11 on second-kind VIEs (by D. Kershaw) and Chapter 12 on first-kind VIEs (by C.T.H. Baker), served as the starting point for the "Volterra activities" at MC. We also observe that the numerical analysis of VIDEs (which is given just 4 pages in Chapter 14, again by Baker) was still in its infancy: it essentially consisted of the papers of Pouzet (1963), Linz (1969), and Feldstein and Sopka (1973); the papers by Brunner and Lambert and by Matthys on the stability of linear multistep methods were to appear only in 1974 and 1976, respectively (cf. [50] for precise references).

2 Volterra at MC and CWI: 1976 to 1986

My first visit to MC (at 2e Boerhaavestraat, with the brewery next door) took place on November 23, 1977. I remember the date since I arrived at the Afdeling Numerieke Wiskunde in the morning of the day of Jan Verwer's doctoral thesis defense and promotion. From the first moment I was struck by the friendly and inspiring ambience created by Pieter and his research group, and my visit turned out to be the first of many more (including a sabbatical in 1979/80). But my description of "first impressions" at MC would not be complete if I did not mention the wonderful hospitality Aly and Pieter extended to me (and have done so ever since) at Aagje van Dekenlaan 229 in Bussum!

1977 saw the publication of the first MC reports on numerical VIEs and VIDEs: in May, NW 42/77 ([1]) by Pieter on general Volterra-Runge-Kutta methods for second-kind equations; NW 48/77 ([8]) by Pieter and Herman te Riele on backward differentiation formulas (BDFs) for such equations; and, in November, NW 53/77 ([9]) by Paul Wolkenfelt – who had just arrived at MC – on BDFs for VIDEs. These reports were complemented by numerical work by students of Pieter's and published as MC notes ([5, 6, 7]).

Between 1977 and 1986 MC/CWI research on the numerical solution of Volterra equations under Piet's guidance focused on the following problems:

(1) The systematic construction, convergence and stability analysis, and efficient implementation of *high-order direct quadrature (DQ) methods*,

$$y_n = g(t_n) + h\sum_{j=0}^{n} w_{n,j}k(t_n, t_j, y_j), \qquad \kappa \le n \le N, \tag{2.1}$$

for second-kind VIEs of he form

$$y(t) = g(t) + \int_0^t k(t, s, y(s))\, ds, \qquad t \in [0, T], \tag{2.2}$$

where g and k are sufficiently regular functions. In (2.1), y_n denotes an approximation to the exact solution $y = y(t)$ of (2.2) at

$t = t_n = nh$ $(n = 0, 1, \ldots, N;\ t_N = T)$; the necessary starting values $y_0(= g(0)), y_1, \ldots, y_{\kappa-1}$, whose number $\kappa \geq 0$ depends on the order of the DQ method, have to be generated by some other method. The analysis of DQ methods was also extended to VIDEs and first-kind VIEs.

During the first stage this work encompassed DQ methods based on the BD formulas and the (ρ, σ)-reducible methods (generation of the weights $w_{n,j}$ in (2.1) from a given high-order linear multistep method for ODEs). MC reports and journal papers containing corresponding results on convergence, stability (see also (2) below) and numerical performance of these methods are [8, 9, 11, 29] (BDFs); [19, 20, 27, 31, 35, 36, 39, 42, 44] ((ρ, σ)-reducible methods); and [1, 14, 15, 18, 22, 39, 41, 42] (general linear multistep and early VLM methods – see (3) below). From the very beginning a central role was given to computational testing and the efficient numerical implementation of these methods, and already in 1978 ([10]) Herman te Riele proposed a test set consisting of ten second-kind VIEs.

This research led also to a complete understanding of two puzzling phenomena in numerical VIEs, namely the connection between the repetition factor (essentially describing the order in which composite quadrature rules for solving second-kind VIEs are put together) and the stability/instability of the resulting linear multistep method (raised by B. Noble in [74] and dealt with in [35, 41]); and the divergence of classical higher-order DQ methods for first-kind VIEs (P. Linz [73]) and the general construction of convergent linear multistep methods (see [31, 35]; these papers and [50] contain additional references on the related work by C.J. Gladwin (1972, 1975), Gladwin and R. Jeltsch (1974), and P.A.W. Holyhead, S. McKee and P.J. Taylor (1975).)

In 1979 a companion volume ([16]) to Syllabus 29.2 appeared: it contained the contributions to an *MC colloquium on integral equations* held between October 1978 and May 1979, with an extensive survey talk by Herman te Riele ([17]) opening the book.

(2) The convergence and stability analysis of *general Volterra-Runge-Kutta (VRK) methods* for (2.2). The methods introduced by Pieter in [1] extend those of Pouzet and Bel'tyukov and have the form

$$y_{n+1}^{(i)} = \tilde{F}_n(t_n + \theta_i h) + h \sum_{j=1}^{m} a_{ij} k(t_n + d_{ij} h, t_n + c_j h, y_n^{(j)}) \quad (2.3)$$

$(i = 1, \ldots, m;\ \theta_i \in [0, 1],\ \theta_m = 1)$, with $y_{n+1} = y_{n+1}^{(m)}$. Here, $\tilde{F}_n(t)$

denotes a (quadrature) approximation to the exact lag (or history) term

$$F_n(t) := \int_0^{t_n} k(t,s,y(s))\,ds \quad (t \geq t_n). \tag{2.4}$$

Various aspects of this stability analysis, as well as numerical examples, were discussed in [1, 3, 12, 13, 21, 23, 24, 25, 26, 28, 32, 34, 39]; see also [78] for related results, especially on stability regions.

The asymptotic stability analysis (for fixed $h > 0$ and $n \to \infty$), was based either on linear VIEs with kernels given by

$$k(t,s,y) = \sum_{j=0}^{r} \lambda_j (t-s)^j \cdot y \quad \text{(usually with } r=0 \text{ or } r=1\text{)},$$

with suitable constants λ_j, or on the nonlinear VIE (2.2) with "finitely decomposable" (degenerate) kernels of the form

$$k(t,s,y) = \sum_{i=1}^{r} g_i(t) f_i(s,y),$$

(see also [44]) and led to new insight on the effect of the discrete lag term $\tilde{F}_n(t)$ on the region of stability of a given method. It turned out that the stability of a VRK method can often be improved by using its "γ-modification", obtained by replacing $\tilde{F}_n(t)$ in (2.3) by

$$F_n^*(t) := \tilde{F}_n(t) + \gamma(t)[y_n - \tilde{F}_n(t_n)],$$

where γ is a suitably chosen function satisfying $\gamma(t_n + \theta_i h) \in [0,1]$ for all n and i. These γ-modified VRK methods were introduced by Pieter in 1977 ([1]) and studied further in [23, 25, 26, 28]; compare also Chapter 4 in the monograph [50].

(3) The creation of a general framework (similar to John Butcher's general linear methods for ODEs) for analyzing, and for obtaining additional insight into, various classes of linear multistep methods for Volterra equations in a unified way. Such a framework is given by the class of *VLM (Volterra linear multistep) methods* ([38, 43, 45]). A VLM method for (2.2) consists of a quadrature formula $\tilde{F}_n(t)$ for the lag term (2.4) and a VLM formula,

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \alpha_i y_{n-i} + \sum_{j=-\kappa}^{\kappa} \beta_{i,j} \tilde{F}_{n-i}(t_{n+j}) = h \sum_{i=0}^{\kappa} \sum_{j=-\kappa}^{\kappa} \gamma_{i,j} k_{n-i}(t_{n+j}), \tag{2.5}$$

where $k_n(t) := k(t, t_n, y_n)$ and where the parameter matrices $A := [\alpha_i]_{(\kappa+1)\times 1}$, $B := [\beta_{i,j}]_{(\kappa+1)\times(\kappa+1)}$ and $C := [\gamma_{i,j}]_{(\kappa+1)\times(\kappa+1)}$ are prescribed. This class of VLM methods encompasses (i) the DQ methods (corresponding to $\kappa = 0$, $A = -B = I$, $C = 0$); (ii) the indirect BDF and other indirect linear multistep methods ([38]) (which are based on the differentiated form of (2.2) but do not require derivative values of g and k; they were shown to possess larger stability regions than their direct counterparts); and (iii) the multilag (ML) and modified ML methods analyzed in [30, 33, 40].

VLM methods exist also for VIDEs and for first-kind VIEs since these equations contain the same Volterra integral operator and hence require the same lag term approximations as (2.2). The seminal paper on VLM methods is [45] (1975) by Pieter and Herman.

A motivation for VLM methods may be found in the imbedding approach already proposed by Pouzet ([68, p.83]; see also [30]): for $v \in [0, t]$ define

$$\Psi(t, v) := \int_0^v k(t, s, y(s))\, ds, \quad t \in [0, T].$$

Then $\Psi(t, t_n) = F_n(t)$ (recall (2.3)); moreover, the VIE (2.2) may be written as $y(t) = g(t) + \Psi(t, t)$, and for continuous k we have

$$\frac{\partial}{\partial v}\Psi(t, v) = k(t, v, y(v)), \quad \Psi(t, 0) = 0, \quad 0 \le v \le t, \tag{2.6}$$

where t may be viewed as a parameter. If the ODE (2.6) is now solved by a linear multistep method, the discretization will involve terms $\tilde{F}_{n-i}(t_{n+j})$ (see (2.5)) which are approximations to $\Psi(t_{n+j}, t_{n-i})$.

(4) The numerical solution of *VIEs with weakly singular kernels*,

$$cy(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} k(t, s, y(s))\, ds, \quad t \in [0, T], \quad 0 < \alpha < 1, \tag{2.7}$$

where $c = 1$ or $c = 0$. A detailed analysis of nonpolynomial spline collocation for (2.7) with $c = 1$, accompanied by extensive numerical comparisons with standard methods, was given in [37] for the case where $\alpha = 1/2$. This paper was complemented by [46] in which various numerical methods for general first-kind VIEs with weakly singular kernels ("generalized Abel equations": (2.7) with $c = 0$) were compared. To my knowledge, this paper is still the most comprehensive comparative study of numerical methods for such weakly singular VIEs.

This period of MC/CWI research on numerical Volterra equations concluded with work by Joke Blom and myself leading to the Fortran 77 code COLVI2 ([47, 48]) for nonlinear VIEs (2.2) – it is based on piecewise polynomial collocation and exploits local superconvergence properties for error and stepsize control –, and with the publication of the CWI monograph *The Numerical Solution of Volterra Equations* by Pieter and myself in 1986. Collaboration with Pieter's research group, and especially with Pieter on this book, has always been a most rewarding and inspiring experience, both mathematically and personally, and I feel very privileged to have been part of NW at MC and CWI.

When describing Pieter's role in the Volterra research at MC and CWI one tends to forget that the pioneering and wide-ranging work described above reflects only a fraction of Pieter's research activities during this time period. Let me just give an illustration: if you look in *Mathematical Reviews*, 1980-1986 (I just happened to have this special five-volume edition of MR reviews on Numerical Analysis handy), you will find reviews of 29 papers authored or co-authored by Pieter. Of these, six are on Volterra equations, while the rest is on ODEs and DDEs (12) and on (parabolic or hyperbolic) PDEs (11) ... !

3 The period from 1986 to October 20, 2000

The addition of powerful computing resources and, especially, the change in the mandate of CWI in the second half of the 1980s from fundamental research to "targeted", self-funding work had as one of its consequences that scientific computation and the numerical solution of "real-life" problems now assumed a more dominant role. Pieter's NW group has always had among its members a number of outstanding experts in programming and scientific computing, including the ones with whom I have had closer contact over the years: Herman te Riele, Jan Verwer, Paul Wolkenfelt and, especially, Joke Blom and Ben Sommeijer. Thus, the move into the development and practical applications of *parallel methods for ODEs and time-dependent PDEs* was swift and very prolific – compare, for example, the doctoral theses [55, 58] and the 1996 survey [59].

Not surprisingly, this development also had considerable implications for future work on numerical Volterra equations. While the (expensive) evaluation of the lag terms $\tilde{F}_n(t)$ or $F_n^*(t)$ (recall (2) in Section 2) can be parallelized in a straightforward way on multi-processor computers, the problem of finding parallel schemes for dealing efficiently with the iterative solution of the often very large systems of algebraic equations arising in implicit VLM or VRK methods (note that the systems of

ODEs, VIEs, or VIDEs resulting from the spatial semidiscretization of PDEs or partial VEs are usually stiff) is much more complex.

This problem led to the design of special parallel iterated Runge-Kutta and block methods possessing appropriate stability properties ([51, 56, 57] and [54]; compare also [52] and [53] for underlying analogous approaches in ODEs, delay DEs, and VIEs), as well as to similarly suitable, "cheap" explicit methods for semidiscretized partial integro-differential equations ([60]). In [54] the given VIDE

$$y'(t) = f\left(t, y(t), \int_0^t k(t,s,y(s))ds\right), \quad y(0) = y_0, \quad t \in [0,T], \qquad (3.1)$$

is rewritten as

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t), \Psi(t,t)), \quad y(0) = y_0; \quad t \in [0,T], \qquad (3.2)$$

with values of Ψ generated via

$$\frac{\partial \Psi(t,v)}{\partial v} = k(t,v,y(v)), \quad \Psi(t,0) = 0, \quad v \in [0,t] \qquad (3.3)$$

(recall (2.6)). The two coupled initial-value problems (3.2), (3.3) are then solved numerically by parallel block methods whose implicit part is characterized by a diagonal matrix (see also [53]), allowing for the parallelization of the iteration process. Particular attention has of course to be given to the stability of the resulting computational method, in order to make them competitive with BDF methods (which are A-stable only of their order does not exceed 2). In [54] A-stable block methods of order up to 4 were obtained.

The aim in [60] was to construct explicit one-step methods of order 2 requiring only one evaluation per time step of the lag term in nonlinear VIDEs that are more general than (3.1),

$$y'(t) = f\left(t, y(t), \int_0^t k(t,s,y(t),y(s))\, ds\right); \qquad (3.4)$$

such general VIDEs, as well as analogous Fredholm IDEs, are typical for many applications (note the dependence of the integrand on both $y(t)$ and $y(s)$). Pieter and Ben showed that this can be achieved by using "stabilized" forward Euler methods characterized by certain stability (or smoothing) matrices acting on the right-hand side of (3.4); these matrices are based on recursion and factorization properties of Chebyshev polynomials (and are related to work of the early 1980s on Runge-Kutta-Chebyshev methods for ODEs).

Finally, [61] employs certain implicit linear multistep methods for solving (3.4) and introduces judicious splittings (factorizations) of the

Jacobian in the modified Newton method used to solve the implicit equations. Numerical experiments for the diffusion and diffusion-convection model equations, using the (L-stable) second-order BD method and the (A-stable) trapezoidal method indicate that this represents a very promising approach for the efficient numerical treatment of semidiscretized partial VIDEs in two and three spatial dimensions.

These papers also reveal that, in spite of the very significant progress, much remains to be done in the numerical analysis and the efficient computational treatment of partial VIDEs. This is an important area since such equations – PDEs with memory terms – occur more and more frequently in realistic mathematical modelling of physical or biological phenomena (compare, e.g., [80] and its extensive bibliography), and time integration methods of the types discussed above may represent a strong alternative to the ones currently used in conjunction with (spatial) finite element methods. Fortunately, much of the groundwork for this future research has already been laid by Pieter and his collaborators.

4 Unfinished business and potential future work

Looking over the work Pieter and his co-workers have done since 1976 it is clear that it has opened the door to many new and challenging problems in the numerical analysis and computational solution of Volterra equations. The following is just a small, subjective list of such future research topics:

- Extension of the VLM framework to VIEs and VIDEs with weakly singular kernels which includes the fractional linear multistep methods of Ch. Lubich as a particular subclass. Does this analysis lead to "better" linear methods for such equations?

- Analysis of the convergence and stability properties and of the performance of VLM methods if used to solve singularly perturbed (nonlinear) VIEs of the form

$$\varepsilon y^{(r)}(t) = g(t) + \int_0^t (t-s)^{-\alpha} k(t,s,y(s))\, ds, \quad t \in [0,T],$$

  with $r = 0$ or $r = 1$, $0 \leq \alpha < 1$, and perturbation parameter ε satisfying $0 < \varepsilon \ll 1$.

- Creation of a (f90) code COLVIDE for nonlinear VIDEs, analogous to the VIE code COLVI2 in [47, 48]. To my knowledge, there does not yet exist good general software for the numerical solution of VIDEs (including nonstandard problems of the type (3.4)).

- Efficient time integrators for partial VIDEs. As indicated in Section 3, partial VIDEs of parabolic or hyperbolic type now often arise as mathematical models for physical and biological processes in which memory (heredity) plays a role. I believe that there has not been enough contact and collaboration between researchers in finite element methods for PVIDEs (see [80] and its bibliography) and the ODE/VIDE "time integrators"; closer cooperation will most certainly lead, via a comprehensive spatial *and* temporal convergence analysis, to more and deeper insight regarding the choice of suitable time integration methods and the creation of efficient PVIDE software.

Acknowledgements

This work was supported in part by the Natural Sciences and Engineering Research Council of Canada (NSERC Research Grant No. OGP0009406).

I am also grateful to CWI for its financial support, and to Herman te Riele and Ben Sommeijer for helpful advice.

References

[1] P.J. van der Houwen, On the numerical solution of Volterra integral equations of the second kind I: Stability, MC Report NW 42/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[2] H.J.J. te Riele (ed.), *Colloquium Numerieke Programmatuur, Deel 2*, MC Syllabus 29.2, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[3] P.J. van der Houwen, Volterra integraalvergelijkingen van de tweede sort, in [2], pp. 123-144.

[4] H.J.J. te Riele, Regularisatiemethoden voor integralvergelijkingen van de eerste sort, in [2], pp. 147-176.

[5] F.J. Reckers, Kwadratuurmethoden voor het numeriek oplossen van lineaire Volterra integraalvergelijkingen van de eerste en tweede sort, MC Note NN 10/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[6] P.J. van der Houwen and F.J. Reckers, Stabiliteit van Runge-Kuttamethoden voor Volterra-integraalvergelijkingen van de tweede sort, MC Note NN 11/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[7] P.J. van der Houwen and J.N. Schilder, Numerical experiments with Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind, MC Note NN 12/77, Mathematisch Centrum, 1977.

[8] P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele, Backward differentiation formulas for Volterra integral equations of the second kind I: Convergence and stability, MC Report NW 48/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[9] P.H.M. Wolkenfelt, Backward differentiation formulas for Volterra integro-differential equations, MC Report NW 53/77, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1977.

[10] H.J.J te Riele, Letter to the author, April 14, 1978 (Test set for second-kind VIEs).

[11] H.J.J. te Riele and P.J. van der Houwen, Backward differentiation methods for Volterra integral equation of the second kind II: Numerical experiments, MC Report NW 57/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[12] J.N. Schilder, *Single-Step Runge-Kutta Type Methods for Solving Non-linear Volterra Integral Equations of the Second Kind*, Master's Thesis, University of Amsterdam, 1978.

[13] P.J. van der Houwen and J.G. Blom, On the numerical solution of Volterra integral equations of the second kind II: Runge-Kutta methods, MC Report NW 61/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[14] P.J. van der Houwen, H.J.J. te Riele and P.H.M. Wolkenfelt, On the stability of multistep formulas for systems of Volterra integro-differential equations, MC Report NW 63/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[15] P.J. van der Houwen and P.H.M. Wolkenfelt, On the stability of multistep formulas for Volterra integral equations of the second kind, MC Report NW 59/78, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1978.

[16] H.J.J. te Riele (ed.), *Colloquium Numerical Treatment of Integral Equations*, MC Syllabus 41, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[17] H.J.J. te Riele, Introduction and global survey of numerical methods for integral equations, in [16], pp. 1-25.

[18] P.J. van der Houwen and P.H.M. Wolkenfelt, On the stability of direct quadrature rules for second kind Volterra integral equations, MC Report NW 18/79, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[19] P.H.M. Wolkenfelt, Linear multistep methods and the construction of quadrature formulae for Volterra integral and integro-differential equations, MC Report NW 76/79, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1979.

[20] P.H.M. Wolkenfelt, Stability analysis of reducible quadrature methods for Volterra integral equations of the second kind, MC Report NW 79/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[21] H. Brunner, Superconvergence in collocation and implicit Runge-Kutta methods for Volterra-type integral equations of the second kind, MC Report NW 80/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980. Also in *Numerical Treatment of Integral Equations (Oberwolfach 1979)* (J. Albrecht and L. Collatz, eds.), pp. 54-72, *ISNM*, 53, Birkhäuser Verlag, Basel, 1980.

[22] P.J. van der Houwen and P.H.M. Wolkenfelt, On the stability of multistep formulas for Volterra integral equations of the second kind, *Computing*, 24 (1980), 341-347 (based on [1, 15]).

[23] P.J. van der Houwen, Convergence and stability analysis of Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind, MC Report NW 83/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[24] H. Brunner, S.P. Nørsett and P.H.M. Wolkenfelt, On V_0-stability of numerical methods for Volterra integral equations of the second kind, MC Report NW 84/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[25] P.J. van der Houwen, Convergence and stability results in Runge-Kutta type methods for Volterra integral equations of the second kind, *BIT*, 20 (1980), 375-377 (based on [23]).

[26] P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt and C.T.H. Baker, Convergence and stability analysis for modified Runge-Kutta methods in the numerical treatment of second kind Volterra integral equations, MC Report NW 96/80, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1980.

[27] P.H.M. Wolkenfelt, On the numerical stability of reducible quadrature methods for second kind Volterra integral equations, *Z. Angew. Math. Mech.*, 61 (1981), 399-401. (See also [19].)

[28] P.J. van der Houwen, P.H.M. Wolkenfelt and C.T.H. Baker, Convergence and stability analysis for modified Runge-Kutta methods in the numerical treatment of second kind Volterra integral equations, *IMA J. Numer. Anal.*, 1 (1981), 303-328.

[29] P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele, Backward differentiation type formulas for Volterra integral equations of the second kind, *Numer. Math.*, 77 (1981), 205-217 (based on [8, 11], and [14]).

[30] P.H.M. Wolkenfelt, P.J. van der Houwen and C.T.H. Baker, Analysis of numerical methods for second kind Volterra equations by imbedding techniques, *J. Integral Equations*, 3 (1981), 61-82.

[31] P.H.M. Wolkenfelt, Reducible quadrature methods for Volterra integral equations of the first kind, *BIT*, 21 (1981), 232-241.

[32] P.J. van der Houwen, A-stable Runge-Kutta methods for Volterra integral equations of the second kind, in *Numerical Methods for Stiff Initial Value Problems* (G. Dahlquist and R. Jeltsch, eds.), pp. 122-126, Bericht No. 9, TH Aachen, 1981.

[33] P.H.M. Wolkenfelt, Modified multilag methods for Volterra functional equations, MC Report NW 108/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981.

[34] S. Amini, C.T.H. Baker, P.J. van der Houwen and P.H.M. Wolkenfelt, Stability analysis of numerical methods for Volterra integral equations with polynomial convolution kernels, MC Report NW 109/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981. Also in *J. Integral Equations*, 5 (1983), 73-92.

[35] P.H.M. Wolkenfelt, *The Numerical Analysis of Reducible Methods for Volterra Integral and Integro-Differential Equations*, Doctoral Thesis, University of Amsterdam, 1981.

[36] P.H.M. Wolkenfelt, The construction of reducible quadrature rules for Volterra integral and integro-differential equations, *IMA J. Numer. Anal.*, 2 (1982), 131-152. (See also [19].)

[37] H.J.J. te Riele, Collocation methods for weakly singular second kind Volterra integral equations with non-smooth solutions, MC Report NW 115/81, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1981. Also in *IMA J. Numer. Anal.*, 2 (1982), 437-449.

[38] P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele, Linear multistep methods for Volterra integral equations of the second kind, MC Report NW 134/82, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1982. Also in [79], pp. 79-93.

[39] P.J. van der Houwen, Algebraically equivalent linear multistep solutions of Volterra integral equations and certain systems of ODEs, MC Report NW 144/82, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1982.

[40] P.H.M. Wolkenfelt, Modified multilag methods for Volterra functional equations, *Math. Comp.*, 40 (1983), 301-316. (See also [31].)

[41] P.H.M. Wolkenfelt, On the relation between the repetition factor and numerical stability of direct quadrature methods for second kind Volterra integral equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20 (1983), 1049-1061.

42] P.J. van der Houwen, Stability results for discrete Volterra equations, MC Report NW 149/83, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983. Also in *Mathematical Analysis* (J.M. Rassias, ed.), pp. 114-139, Teubner Texte zur Mathematik, 79, BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1985.

[43] P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele, Linear multistep methods for Volterra integral and integro-differential equations, MC Report NW 151/83, Mathematisch Centrum, Amsterdam, 1983.

[44] P.J. van der Houwen and J.G. Blom, Stability results for discrete Volterra equations: Numerical experiments, CWI Report NM-R8409, CWI, Amsterdam, 1984. Also in *Constructive Methods for the Practical Treatment of Integral Equations (Oberwolfach 1984)* (G. Hämmerlin and K.-H. Hoffmann, eds.), pp. 166-178, *ISNM*, 78, Birkhäuser Verlag, Basel, 1985.

[45] P.J. van der Houwen and H.J.J. te Riele, Linear multistep methods for Volterra integral and integro-differential equations, *Math. Comp.*, 45 (1985), 439-461; S21-S28 (supplement). (See also [38].)

[46] H.J.J. te Riele and P. Schroevers, A comparative survey of numerical methods for the linear generalized Abel integral equation, *Z. Angew. Math. Mech.*, 66 (1986), 163-173.

[47] J.G. Blom and H. Brunner, The numerical solution of nonlinear Volterra integral equations of the second kind by collocation and iterated collocation methods, CWI Report NM-R8522, CWI, Amsterdam, 1985. Also in *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 8 (1987), 806-830.

[48] J.G. Blom and H. Brunner, Discretized collocation and iterated collocation for nonlinear Volterra integral equations of the second kind, CWI Report NM-R8618, CWI, Amsterdam, 1986. Also in *ACM Trans. Math. Software*, 17 (1991), 167-177.

[49] H. Brunner, On the history of numerical methods for Volterra integral equations, *CWI Newsletter*, 11 (1986), 3-20.

[50] H. Brunner and P.J. van der Houwen, *The Numerical Solution of Volterra Equations*, CWI Monographs, 3, North-Holland, 1986.

[51] M.R. Crisci, P.J. van der Houwen, E. Russo and A. Vecchio, Parallel Volterra Pouzet Runge-Kutta methods for Volterra integral equations, Rapp. Tec. 87/91, Istituto per Applicazioni della Matematica, C.N.R., Naples, 1991.

[52] P.J. van der Houwen, Preconditioning in implicit initial-value problem methods on parallel computers, CWI Report NM-R9216, CWI, Amsterdam, 1992. Also in *Adv. Comput. Math.*, 1 (1993), 39-60.

[53] P.J. van der Houwen and B.P. Sommeijer, Iterated Runge-Kutta methods on parallel computers, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 12 (1991), 1000-1028.

[54] B.P. Sommeijer, W. Couzy and P.J. van der Houwen, A-stable parallel block methods for ordinary and integro-differential equations, *Appl. Numer. Math.*, 9 (1992), 267-281.

[55] B.P. Sommeijer, *Parallelism in the Numerical Solution of Initial Value Problems*, Doctoral Thesis, University of Amsterdam, 1992.

[56] M.R. Crisci, P.J. van der Houwen, E. Russo and A. Vecchio, Stability of parallel Volterra-Runge-Kutta methods, CWI Report NM-R9207, CWI, Amsterdam, 1992.

[57] M.R. Crisci, E. Russo, P.J. van der Houwen and A. Vecchio, Stability of parallel Volterra-Runge-Kutta methods, *J. Comput. Appl. Math.*, 45 (1993), 169-180. (See also [56].)

[58] Nguyen huu Cong, *Parallel Runge-Kutta-Nyström Methods*, Doctoral Thesis, University of Amsterdam, 1994.

[59] P.J. van der Houwen and B.P. Sommeijer, CWI contributions to the development of parallel Runge-Kutta methods, CWI Report NM-R9608, CWI, Amsterdam, 1996. Also in *Appl. Numer. Math.*, 22 (1996), 327-344.

[60] P.J. van der Houwen and B.P. Sommeijer, Euler-Chebyshev methods for integro-differential equations, CWI Report NM-R9612, CWI, Amsterdam, 1996. Also in *Appl. Numer. Math.*, 24 (1997), 203-218.

[61] H. Brunner, P.J. van der Houwen and B.P. Sommeijer, Splitting methods for partial Volterra integro-differential equations, CWI Report MAS-R9909, CWI, Amsterdam, 1999.

Additional, non-MC/CWI references:

[62] G. Prasad, On the numerical solution of integral equations, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, 42 (1924), 46-59.

[63] Sh.E. Mikeladze, On the numerical solution of integral equations (in Russian, with a French summary), *Izv. Akad. Nauk SSSR Otv. Mat. VII*, No. 2 (1935), 255-300.

[64] V.I. Krylov, Application of the Euler-Laplace formula to approximate solution of integral equations of Volterra type (in Russian), *Trudy Mat. Inst. Steklov*, 28 (1949), 33-72.

[65] Y. Suyama and K. Nakamori, On numerical solution of the integral equation of Volterra-type (in Esperanto), *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A*, 6 (1952), 121-129.

[66] L. Fox and E.T. Goodwin, The numerical solution of non-singular linear integral equations, *Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A*, 245 (1953), 501-534.

[67] J.G. Jones, On the numerical solution of convolution integral equations and systems of such equations, *Math. Comp.*, 15 (1961), 131-142.

[68] P. Pouzet, Etude en vue de leur traitement numérique des équations intégrales de type Volterra, *Rev. Française Trait. Inform. Chiffres*, 6 (1963), 79-112.

[69] B. Noble, The numerical solution of nonlinear integral equations and related topics, in *Nonlinear Integral Equations (Madison 1963)* (P.M. Anselone, ed.), pp. 215-318, University of Wisconsin Press, Madison, 1964.

[70] B.A. Bel'tyukov, An analogue of the Runge-Kutta method for the solution of nonlinear integral equations of Volterra type, *Differential Equations*, 1 (1965), 417-433.

[71] M. Kobayasi, On numerical solution of the Volterra integral equations of the second kind by linear multistep methods, *Rep. Statist. Appl. Res. Un. Japan Sci. Engrs.*, 14 (1966), 1-21.

[72] P. Linz, The numerical solution of Volterra integral equations by finite difference methods, MRC Tech. Summary Report No. 825, University of Wisconsin, Madison, 1967.

[73] P. Linz, *Numerical Methods for Volterra Integral Equations with Applications to Certain Boundary Value Problems*, Ph.D. Thesis, University of Wisconsin, Madison, 1968.

[74] B. Noble, Instability when solving Volterra integral equations of the second kind by multistep methods, in *Conference on Numerical Solution of Differential Equations (Dundee 1969)* (J.Ll. Morris, ed.), pp. 23-39, *Lecture Notes Math.*, 109, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1969.

[75] R.K. Miller, *Nonlinear Volterra Integral Equations*, Benjamin, Menlo Park, CA, 1971.

[76] L.M. Delves and J. Walsh (eds.), *Numerical Solution of Integral Equations*, Clarendon Press, Oxford, 1974 (Chapters 11, 12, 14).

[77] C.T.H. Baker, *The Numerical Treatment of Integral Equations*, Oxford University Press, Oxford, 1977 (Chapter 6).

[78] C.T.H. Baker and M.S. Keech, Stability regions in the numerical treatment of Volterra integral equations, *SIAM J. Numer. Anal.*, 15 (1978), 394-417 (based on a University of Manchester report of 1975).

[79] C.T.H. Baker and G.F. Miller (eds.), *Treatment of Integral Equations by Numerical Methods (Durham 1982)*, Academic Press, London, 1982.

[80] C.M. Chen and T.M. Shih, *Finite Element Methods for Integrodifferential Equations*, Series on Applied Mathematics, 9, World Scientific Publishing Co., Singapore, 1998.

A fundamental differential equation in electron-gun design

J. DE GROOT [§]

Paper dedicated to Piet van der Houwen

Abstract

Some properties of a differential equation arising from electron optics are discussed. The physical model leading to this equation is briefly sketched. It is explained how the related two-point boundary-value problem can be solved numerically.

1 Introduction

Few numerical analysts, who are spending many hours in front of their computer, will realize that the monitor itself is a source of quite interesting mathematical problems. In most cases this monitor is a cathode-ray tube. Notwithstanding the fact that this type of display has been invented more than a hundred years ago, in the world of computer monitors and TV-sets it still is dominant as compared to alternatives such as liquid-crystal displays, at least if costs, resolution and brightness are considered. The obvious reason for this prominent position since the early days of picture display is the gradual improvement of performance along with a drastic cost reduction, both being results of research efforts leading to a better understanding of the underlying physical principles and the relevant steps in the production process, with an emphasis on production of large quantities and a small rejection rate. The physical principles are classical but of a widely varying nature, ranging from electromagnetic-field theory to mechanics. In a sense, the situation with the cathode-ray-tube display is similar to the one of the combustion engine which also occupies its leading position with respect to its competitors due to a steady process of improvement.

In order to support the design of cathode-ray tubes, software tools have been developed. Because of its strategic value, this software is considered to be a proprietary tool in the large electronics companies. This means that details of the physics and the numerical methods used cannot easily be found in the open literature but only scattered in the patent

[§]Formerly with Philips Research Laboratories,Eindhoven, The Netherlands

literature. Historically, in Philips Research the development of software for electron-optical devices, such as displays, was one of the very first large-scale software projects.
In this paper we discuss some numerical aspects of the ordinary differential equation of second order which, based on a physical model due to Langmuir [1], describes the electric field just in front of the cathode of the electron gun. This field distribution is crucial for the formation of the electron beam, and thus for the picture quality that can be achieved.

2 Electron optics of a cathode-ray tube

Drastically simplified, one can state that, essentially, a cathode-ray tube which, among others, is used as a computer monitor, consists of an electron gun, a magnetic-deflection coil and a phosphorus screen with a shadow mask just in front of it at short distance. In an electron gun electrons are emitted from a thermionic cathode. After having left this cathode, they travel in an electric field generated by a system of several more or less cylindrical conductors. This field is such that the electrons are focused in a beam having a very small cross-section. The electric field is also determined by the charges of the electrons themselves. Along with the corpuscular nature of the electrons, this makes the mathematical model rather complicated. The charge distribution in the cross-section and the shape of the latter are of essential importance for the picture quality of the tube. The electrons in the beam hit the phosphorus screen as a small spot creating some light by fluorescence. There also is a magnetic field present generated by a deflection coil. The magnetic field, which varies with time, serves to write a system of horizontal lines on the phosphorus screen. By modulation of the beam current, when writing these lines, a picture can be displayed on the screen.
In reality, the situation described here is more complex. In order to produce a colour picture, three identical electron guns are required which are positioned closely together. These guns are responsible for the generation of red, green and blue, respectively, spots on the screen. These basic colours are produced using three types of phosphorus, each one emitting a different colour. Accordingly, the phosphorus screen is not homogeneous but is composed of a large number of triplets of very thin vertical strips of phosphorus, each one separated by a thin black strip. The successive strips of phosphorus each correspond to one of the three basic colours. The width of a triplet is more or less equal to the width of a pixel. The shadow mask just in front of the screen is a thin metal plate with many small holes in it. These holes are positioned such that elec-

trons produced by the "red" electron gun only hit the red light emitting phosphorus strip. The same holds true for the two other colours. To the human eye, the three basic colours are giving the impression of some composite colour. This shadow mask may introduce many electron-optical errors, such as Moiré-patterns resulting from the interference of the periodic system of horizontal lines written on the screen and the periodic pattern of the holes in the shadow mask. Also deformation of the shadow mask ("dooming effect") because of local heating is a source of picture errors.
From the above it can be understood that the optical quality of the picture depends on many parameters. Their influence can be studied by simulation using appropriate models. In this paper we only deal with a single important aspect: the electric field just in front of the cathode and the current density in the electron beam, both being strongly determined by the emission process at the cathode. This process, of course, is of a statistical nature. The physical theory required still does not seem to be fully developed. For the design of electron guns one is using a rather strongly simplified statistical model which Langmuir [1] developed in the beginning of the last century. We will discuss it briefly in the next section. More advanced models have been proposed recently by such authors as Sabchevski [2], Abdallah [3] and Raviart [4]. Unfortunately, these models also describe idealized cases and do not yet lend themselves immediately to application in the design process of electron guns.

3 Langmuir's model revisited

The strongly simplified model of an electron gun studied by Langmuir can be briefly sketched as follows. We consider an idealized electron gun consisting of two parallel, perfectly conducting, infinite plates at finite distance d. One of the plates is the heated thermionic cathode, which is emitting electrons leaving the surface at velocities obeying a Maxwell-Boltzmann distribution leading to a probability-density function $f_c(\vec{v})$ at the cathode:

$$f_c(\vec{v}) = \alpha \exp\left(-\tfrac{1}{2}mv^2/kT\right) \tag{1}$$

$\vec{v}$ being a vector in three-dimensional Euclidian space, v its modulus, m the electron mass, T the cathode temperature and k Boltzmann's constant. The normalization coefficient α is such that

$$\int_{\forall\vec{v},v_z\geq 0} v_z f_c(\vec{v})\,\mathrm{d}\vec{v} = j_s/e, \tag{2}$$

$-e$ being the electron charge ($e > 0$), j_s the saturation-current density, which typically is a parameter of the cathode material; v_z is the

z-component of $\vec{v}$ with z the coordinate perpendicular to the cathode, positive in the direction to the anode.
Introducing $f(\vec{r}, \vec{v})$ as the density function in the six-dimensional phase space, known from statistical physics, with three coordinates of the position vector $\vec{r}$ and three coordinates of the velocity vector $\vec{v}$, on a trajectory in phase space we have, according to Liouville's theorem [5], neglecting collisions of the electrons:

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = f_c(\vec{v}_c), \tag{3}$$

$\vec{v}_c$ representing electron velocitity at the cathode. In this model the electric field $\vec{E}$ has only one single component E_z, directed along the z-axis, and depending on z only. This field results from a voltage V_a applied externally between cathode and anode, and from the space-charge density $\rho(\vec{r})$ of the electrons with ρ being defined as

$$\rho(\vec{r}) = -e \int_{\vec{v}} f(\vec{r}, \vec{v}) \, \mathrm{d}\vec{v}. \tag{4}$$

We can define an electric potential $V(z)$ such that

$$E_z = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}. \tag{5}$$

At the cathode, where $z = 0$, we have $V(0) = 0$ and at the anode $V(d) = V_a$. In our model ρ depends on V as well. The electric potential $V(z)$ satisfies Poisson's equation

$$\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}z^2} = -\rho(z)/\varepsilon_0, \tag{6}$$

with ε_0 the permittivity of vacuum. Because of conservation of energy along each of the trajectories of the electrons, we have

$$\tfrac{1}{2}mv^2 - eV(z) = \tfrac{1}{2}mv_c^2 \tag{7}$$

yielding with (1) and (3)

$$f(\vec{r}, \vec{v}) = \alpha \exp\left((-\tfrac{1}{2}mv^2 + eV(z))/kT\right). \tag{8}$$

It is interesting to consider the behaviour of this Langmuir-model as a function of V_a. For very large, positive values of V_a, all electrons arrive at the anode and, therefore, the current density at the anode is j_s. For very large, negative V_a, no electrons are able to reach the anode; they all return to the cathode and the current density tends to zero. In the intermediate case not all electrons are able to reach the anode. Part of them return to the cathode. Because of the influence of space charge of the electrons present, in front of the cathode a potential minimum builds up such that the electric field exerts a force on the electrons which is directed to the cathode. Note that in the integral representation (4) for ρ, integration extends over all relevant values of the velocity components, including negative values of v_z occurring in the region between cathode and potential minimum. In the other region, between anode and potential minimum, for v_z integration only extends over positive, nonvanishing values. It follows from conservation of energy that the smallest possible value of v_z in the first-mentioned region is negative and equal to $v_{z,min} < 0$ and in the other region positive, equal to $-v_{z,min}$, with

$$v_{z,min}(z) = -\left(\frac{2e}{m}(V(z) - V_{min})\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

with $V_{min} \leq 0$. Therefore, v_z is contained in the interval

$$\pm v_{z,min}(z) < v_z < \infty, \tag{10}$$

signs according to what just has been stated. The components v_x and v_y can take on all values, positive and negative, on the real line.
We now are in a position to carry out the integration in the expression (4) for ρ. It will be understood that the result via (9) explicitly contains the potential $V(z)$. Using the result obtained for $\rho(z)$, Poisson's equation (6) is a differential equation for $V(z)$ with a nonlinear source term. It is easily verified that with the following changes of variables: $z \mapsto s$ and $V \mapsto w$

$$s = (2\pi)^{\frac{1}{4}}\varepsilon_0^{-\frac{1}{2}}\left(\frac{kT}{e}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{e}{m}\right)^{-\frac{1}{4}} j_s^{\frac{1}{2}} \exp\left(eV_{min}/2kT\right)(z - z_{min}), \tag{11}$$

$$w = \frac{e}{kT}(V - V_{min}), \tag{12}$$

Poisson's equation transforms into

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}s^2} = \tfrac{1}{2}\exp\left(w\right)\left(1 \mp \operatorname{erf}\left(\sqrt{w}\right)\right), \tag{13}$$

the plus-sign to be used in the region between cathode and potential minimum and the minus-sign elsewhere. Further, for $s = 0$, which denotes the location of the minimum,

$$w(0) = 0, \quad \frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}(0) = 0. \tag{14}$$

As usual, the error function erf (u) is defined as

$$\operatorname{erf}(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^u \exp\left(-v^2\right)\mathrm{d}v. \tag{15}$$

The (locally) autonomous differential equation (13) is playing a fundamental role in the computer-aided design of electron guns. In fact, of course, we are dealing with two equations. Taking into account the boundary conditions at cathode and anode, they together determine z_{min} and V_{min}, i.e. the location and the depth of the potential minimum.
Closely connected with the potential minimum is the current density j at the cathode, which is given by

$$j = j_s \exp\left(eV_{min}/kT\right). \tag{16}$$

Using this quantity, one is able to compute the current in the electron beam of a cathode-ray tube.
We have seen in this section that we arrived at the differential equation (13) for the potential distribution using the assumption that this distribution essentially is one-dimensional, i.e. only depends on z. In real electron guns this assumption is not valid. But it has turned out that the beam current can be reasonably well estimated assuming the cathode surface being covered by infinitely many of these Langmuir-diodes, each one contributing part of the beam current. The diode voltage V_a now is different for each infinitesimal Langmuir-diode and, in simulations, follows from a -solution of Poisson's equation for the complicated electrode structure of a real electron gun. In this way, using a distribution of locally one-dimensional Langmuir-diodes, we are able to model electron guns taking into account the statistical behaviour of electrons leaving the cathode surface, at least for not too large beam currents. A physically more realistic full-3D simulation with no restriction on the electric field and also taking into account electron statistics, still is not feasible because of the large amount of electrons to be incorporated for a correct result. This is the motivation for studying (13) in some more detail.

4 Numerical considerations

Recalling that the cathode is located at $z = 0$ and the anode at $z = d$, the boundary conditions for Poisson's equation (6) are $V(0) = 0$ and $V(d) = V_a$. If for solutions of (13) we adopt the notation $w_+(s)$ when the plus-sign is used, and for $w_-(s)$ otherwise, the boundary conditions translate into

$$\begin{aligned} w_+(s_c) &= -eV_{min}/kT \\ w_-(s_a) &= e(V_a - V_{min})/kT \end{aligned} \tag{17}$$

with

$$s_c = s(0) \quad \text{and} \quad s_a = s(d) \tag{18}$$

according to (11). We note that both s_c and s_a explicitly depend on z_{min} and V_{min} as can be seen in (11).
We now sketch a numerical method to solve z_{min} and V_{min} from (13) and (17). We know $0 \leq z_{min} \leq d$, and, without being able to prove this, we may assume from the above model description that $V_{min} \leq 0$, at least in physically relevant cases. We will demonstrate that this numerical problem can be reformulated to finding a zero of a single nonlinear equation in a given interval in terms of V_{min} only. This can beachieved using the Bus-Dekker rootfinder [6] along with solving (13) by means of a modern version of the Bulirsch-Stoer algorithm [7] with adaptive selection of stepsize h using rational extrapolation to $h = 0$.
We proceed as follows determining z_{min} directly for any selected value of V_{min}. Put

$$\begin{aligned} u &= w_+ \\ v &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}s} \end{aligned} \tag{19}$$

and rewrite (13), in the case of the plus-sign, as a system of first-order differential equations:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v} &= v/f \\ \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}v} &= 1/f \end{aligned} \tag{20}$$

with

$$f := \tfrac{1}{2}\exp(u)\,(1 + \operatorname{erf}(\sqrt{u})) \tag{21}$$

and, for $v = 0$, $u(0) = s(0) = 0$. Monotony of u and s as functions of v allows us to formulate (20).
Integrating (13) once and selecting the positive root, as we should, we immediately arrive at

$$v(u) = \left(\exp(u) - 1 + \exp(u)\operatorname{erf}(\sqrt{u}) - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{u}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{22}$$

the arguments of the square roots being non-negative.
After having selected some value of V_{min}, we find the corresponding value of z_{min} from s by numerical integration of (20) from $v = 0$ to $v = v(w_+(s_c))$, using (22). In this way, to any value of V_{min} in the range of interest, one can determine the corresponding value of z_{min}. This reduces our problem to finding a root V_{min} of the second equation of (17). As has been indicated before, we do this by zero-inclusion, i.e. finding a finite interval of values of V_{min} containing a zero of this equation. A lower bound of this interval can be determined as follows. The left-hand side $w_-(s_a)$ is a solution at $s = s_a$ of (13), now with minus-sign:

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_-}{\mathrm{d}s^2} = \tfrac{1}{2}\exp(w_-)\operatorname{erfc}(\sqrt{w_-}) \tag{23}$$

with $w_-(0) = 0$ and $\frac{\mathrm{d}w_-}{\mathrm{d}s}(0) = 0$. Here $\mathrm{erfc}(u)$ denotes the complementary error function:

$$\mathrm{erfc}\,(u) = 1 - \mathrm{erf}\,(u). \tag{24}$$

Using the well-known [8] asymptotic expression

$$\exp\,(w)\mathrm{erfc}\,(\sqrt{w}) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi w}} \quad \text{as} \quad w \to \infty, \tag{25}$$

we find the asymptotic solution of (23):

$$w_-(s) \sim \left(\frac{9}{8\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{2}{3}} s^{\frac{4}{3}} \quad \text{as} \quad s \to \infty. \tag{26}$$

It is easy to verify that this asymptotic expression is greater than $w_-(s)$ for all $s > 0$. Substituting the asymptotic approximation for $w_-(s_a)$ in the second equation of (17) yields a value of s_a that is too small, as is the corresponding value of $w_-(s_a)$. Using this value of s_a in (11) and replacing $(d - z_{min})$ by d, yields, after solving for the corresponding value of V_{min} in (11), a lower bound for the interval containing the zero. We call this bound $V_{min,l}$ and the corresponding value of s_a is denoted by $s_{a,l}$. Note that we are restricting ourselves to non-positive values of V_{min}. This corresponds to the inequality

$$w_-(s_{a,l}) < \frac{e}{kT}(V_a - V_{min,l}). \tag{27}$$

An upper bound of the interval is now easily obtained by successive halving. Select

$$V_{min} = 2^{-n} V_{min,l} \text{ with } n = 1, 2, \dots, \tag{28}$$

compute $w_-(s_a)$ by solving (13) until for some n:

$$w_-(s_{a,u}) > \frac{e}{kT}(V_a - V_{min,u}) \tag{29}$$

with $V_{min,u}$ and $s_{a,u}$ being the corresponding values of the upper bound. One always will arrive at this inequality for n sufficiently large since, according to (11), s depends on V_{min} via the factors $\exp\,(eV_{min}/kT)$and $(d - z_{min})$. For $V_{min} \to 0$, while $V_{min} < 0$, both factors are increasing and so does s_a, and $w_-(s_a)$ as well because of monotonicity. In practice, $n = 2$ or $n = 3$ already yield the required upper bound of the interval. For this fixed, finite interval of values of V_{min}, the root finding algorithm computes a certain number of approximations to the root. In this way z_{min} is repeatedly computed using (20) and then $w_-(s_a)$ follows by solving (13). This process converges and yields the pair (z_{min}, V_{min}).

It is interesting to check by means of the numerical technique just described how the potential minimum behaves with V_a. In Table 1 and Table 2 this is displayed for two typical values of d. In agreement with what has been stated here earlier, one can see that for large, positive values of V_a the minimum moves to the cathode. All electrons leaving the cathode arrive at the anode and the beam-current density tends to the saturation value j_s. In the opposite case when V_a gets smaller and even negative, most of the electrons are returned to the cathode by the electric field present. For some (finite) V_a the minimum finally coincides with the anode.
To conclude, we also note that, for some $s_\infty < \infty$, $w_+(s) \uparrow \infty$ for $s \uparrow s_\infty$. Numerically, we have determined: $s_\infty = 2.55\cdots$. It can be easily understood that such an asymptote of (13) for $w_+(s)$ should exist.

5 Conclusions

The differential equation discussed here is less well-known, but fundamental for the behaviour of electron guns in cathode-ray tubes used as computer monitors or TV-displays. Although in the underlying model the statistical nature of electron emission from the cathode is taken into account, restriction to a one-dimensional electric field only yields realistic results for fairly small beam currents. However, in the design of modern electron guns there is a tendency to increase the beam current in order to enhance contrast and intensity. In that case more realistic models are required, in particular for the electric field near the cathode. It is expected that an improved description of electron behaviour in electron guns can be obtained using the Boltzmann-Vlasov equation for the density in six-dimensional phase space. Its characteristic lines are the electron trajectories in phase space which can be computed for an estimated electric field being a step in an iterative process for solving the full-3D Poisson equation using (4). We refer to the literature mentioned in Section 2 and to [9].

References

[1] I. Langmuir, The effect of space charge and initial velocities on the potential distribution and thermionic current between parallel plate electrodes, Phys.Rev. **21** (1923) 419

[2] S. Sabchevski, G. Mladenov, A. Titov, I. Barbarich, Computer simulation of technological electron-optical systems, Optik **90** (1992) 117

[3] N.B. Abdallah, P. Degond, The Child-Langmuir law for the Boltzmann equation of semiconductors, SIAM J.Math.Anal. **26** (1995) 364

[4] B. Greengard, P.-A. Raviart, A boundary-value problem for the stationary Vlasov-Poisson equation: the plane diode, Comm. Pure Appl.Math **43** (1990) 473

[5] G. Joos, *Theoretical Physics*, Blackie, London, 1951

[6] J.C.P. Bus, T.J. Dekker, Two efficient algorithms with guaranteed convergence for finding a zero of a function, ACM Trans.Math.Software **1**(1975) 330

7] P. Deuflhard, Recent progress in extrapolation methods for ordinary differential equations, SIAM Review **27** (1985) 505

] M. Abramowitz, I.A. Stegun (eds), *Handbook of Mathematical Functions*, 1967, National Bureau of Standards, Washington

9] P.-A. Raviart, An analysis of particle methods, in: F. Brezzi (ed.), *Numerical methods in fluid dynamics*, Springer, Berlin, 1985 (Lecture Notes in Mathematics, Nr. 1127)

$d = 100\mu$m			
V_a(volt)	$-V_{min}$(volt)	$z_{min}(\mu$m)	s_c
53.1	0.000	0.0	0.00
10.0	0.215	4.3	2.11
1.0	0.442	16.3	2.41
0.1	0.522	25.4	2.46
-0.01	0.536	27.5	2.48
-0.1	0.549	29.5	2.48
-0.3	0.585	35.7	2.48
-0.5	0.634	46.6	2.50
-0.6	0.669	56.2	2.51
-0.7	0.718	73.0	2.52
-0.777	0.777	100.0	2.53

Table 1: *Potential minima for* $d = 100\mu$m

$d = 200\mu$m			
V_a(volt)	$-V_{min}$(volt)	$z_{min}(\mu$m)	s_c
137.3	0.000	0.0	0.00
10.0	0.344	9.4	2.33
1.0	0.564	31.9	2.48
0.1	0.637	47.5	2.51
-0.01	0.650	50.8	2.51
-0.1	0.661	54.0	2.51
-0.3	0.691	63.3	2.52
-0.5	0.730	78.1	2.53
-0.7	0.778	106.0	2.53
-0.9	0.900	192.8	2.54
-0.907	0.907	200.0	2.54

Table 2: *Potential minima for* $d = 200\mu$m

A linearly-implicit scheme which damps only where it should do so

Willem Hundsdorfer, CWI, Amsterdam

Preface – Voorwoord

Bij het naderend afscheid van Piet van der Houwen heb ik mijn gedachten laten gaan over wat wiskundige zaken die door de jaren heen een grondslag vormden voor het werk van Piet. Deze gedachten zijn hier neergeschreven. Dit is geen afgerond wiskundig artikel. Er wordt een aanzet gegeven voor een nieuwe klasse van numerieke methoden die gebaseerd zijn op oud werk van Piet, lineair impliciete methoden en speciale stabiliteits functies (zie [1]), en recent werk van Piet, het gebruik van matrix factorizaties binnen zulke methoden (zie [2]).

Wellicht dacht Piet van der Houwen dat zijn werk op het CWI redelijk afgerond was, en dat hij zich voortaan bezig kon gaan houden met leuke schaakproblemen. Dat is niet zo. Sterker, als Piet dat dacht, dan was dat een ernstige vergissing. Deze aanzet tot nieuwe integratie technieken zou nader geanalyseerd dienen te worden. Zo'n analyse is wellicht vrij moeilijk maar zeker interessanter dan het oplossen van schaakproblemen. Misschien zelfs nuttiger.

A factorized linearly-implicit scheme

For the numerical solution of the initial value problem

$$u'(t) = F(u(t)), \qquad u(0) = u_0,$$

linearly-implicit methods offer good stability properties and computational efficiency [1]. We consider such methods with step size $\tau > 0$, yielding approximations $u_n \approx u(t_n)$ on the gridpoints $t_n = n\tau$. The Jacobian approximation used in such methods is denoted by $A(v) \approx F'(v)$. When applied to the linear, scalar test equation $u'(t) = \lambda u(t)$ the methods reduce to $u_{n+1} = \varphi(\tau\lambda)u_n$ with φ the so-called stability function.

We consider the following scheme

$$u_{n+1} = u_n + (I - \tau A_1(u_n))^{-1}(I - \tfrac{1}{2}\tau A_2(u_n))^{-1}\tau F(u_n) \tag{1}$$

where

$$A_1(v) = \tfrac{1}{2}(A(v) + A^*(v)), \qquad A_2(v) = \tfrac{1}{2}(A(v) - A^*(v)),$$

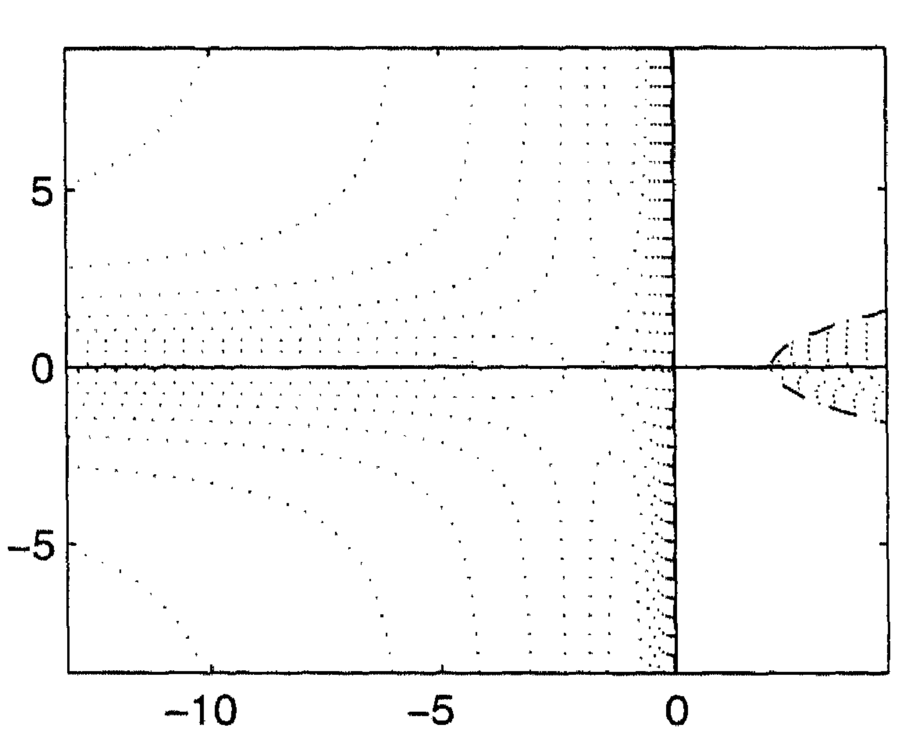
with A^* the Hermitian adjoint of A. The stability function of this method is given by

$$\varphi(z) = 1 + \frac{z}{(1-x)(1-\frac{1}{2}iy)} \qquad \text{for } z = x + iy \in \mathbb{C}\ . \tag{2}$$

This stability function has the following nice features:

$$\begin{aligned} &\text{a)} \qquad \operatorname{Re} z \le 0 \quad \Rightarrow \quad |\varphi(z)| \le 1, \\ &\text{b)} \qquad |\varphi(iy)| = 1 \quad \text{for all } y \in \mathbb{R}\ , \\ &\text{c)} \qquad |\varphi(x)| \to 0 \quad \text{as } x \to -\infty\ . \end{aligned} \tag{3}$$

The above properties follow from an easy calculation. In fact, (3.a) can be formulated somewhat more general: if $\operatorname{Re} z < 2$ then $|\varphi(z)| \le 1$ iff $|e^z| \le 1$. This stability function offers at the same time strong damping at $-\infty$ and conservation on the imaginary axis, something which is not possible with standard methods for which the stability function is rational. The stability region $\{z \in \mathbb{C} : |\varphi(z)| \le 1\}$ is plotted in Figure 1.



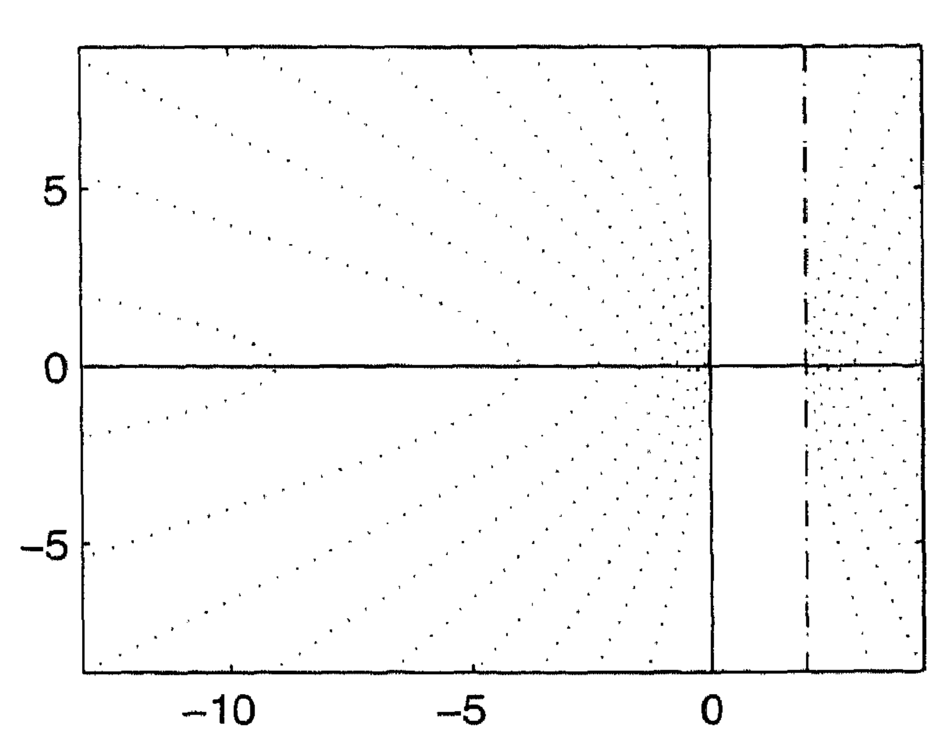


FIGURE 1. Stability regions for method (1) on the left and method (5) on the right. The contour lines for $|\varphi(z)|$ at the levels $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \ldots, \frac{9}{10}$ are dotted.

Of course, considerations for the scalar stability function are only interesting if they can be extended to systems. For a linear system of ODEs $w'(t) = Aw(t)$ in $\mathbb{R}^m$ the method reads $u_{n+1} = \varphi(\tau A)u_n$ where φ is defined for matrix arguments by

$$\varphi(Z) = I + (I - \operatorname{Re} Z)^{-1}(I - \tfrac{1}{2}\operatorname{Im} Z)^{-1} Z,$$

with $\mathrm{Re}Z = \frac{1}{2}(Z + Z^T)$ and $\mathrm{Im}Z = \frac{1}{2}(Z - Z^T)$. With Euclidian inner product and spectral norm, one would hope that the (3.a) generalizes to

$$\sup_{v \in \mathbb{R}^m} \langle v, Av \rangle_2 \leq 0 \quad \Rightarrow \quad \|\varphi(\tau A)\|_2 \leq 1. \tag{4}$$

This would hold if φ were rational. However for our non-rational function φ this property is not valid. A simple counter example is given by

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{with } \tau\alpha = -8,\ \tau\beta = 9/2 \ .$$

In this example we have $\|\varphi(\tau A)\|_2 \approx 5.3$, but a MATLAB experiment shows that $\|\varphi(\tau A)^n\|_2$ tends to 0 quickly when the power n is increased, so the practical relevance for numerical stability of this counter example is unclear. Further it should be noted that property (4) will hold if the matrix A is normal.

Alternatives

If we consider $z = -r + ir$ with $r \gg 0$ then the above stability function (2) gives very little damping, see the contour lines in Figure 1. An alternative is provided by

$$u_{n+1} = u_n + \left(I - \tau A_1(u_n) - \tfrac{1}{2}\tau A_2(u_n)\right)^{-1} \tau F(u_n). \tag{5}$$

The stability region and contour lines for this method are given in the right plot of Figure 1. The scalar stability function also satisfies (3) but in comparison to the function (2) it gives more damping away from the negative real axis.

Scheme (5) is just an example of an alternative. Both (1) and (5) are first order accurate. Higher order variants can be obtained through higher order Rosenbrock type methods. Here the notion of order refers to the classical order for nonstiff ODEs. It should be examined whether the accuracy is maintained with PDEs, for instance advection-diffusion equations. Since there are no artificial stages in these schemes it seems likely that oder reduction effects that plague fractional-step methods can be avoided here.

Conclusion – Slotsom

Op grond van het bovenstaande kunnen we tot de volgende slotsom komen:

Piet, er is werk aan de winkel !

Het is misschien spijtig maar die schaakproblemen zullen echt moeten wachten.

REFERENCES

[1] P.J. van der Houwen, *Construction of Integration Formulas for Initial Value Problems.* North-Holland Publ. Co., Amsterdam - New York - Oxford, 1977.

[2] P.J. van der Houwen, B.P. Sommeijer, *Approximate factorization for time-dependent partial differential equations.* CWI Report MAS-R9915, Amsterdam (1999).

Phantoms and Ghosts. (Is the Discrete World an Approximation of the Continuous or the Other Way Around?) *

Felice Iavernaro, Francesca Mazzia †
Donato Trigiante ‡

1 Introduction

The title of this paper is intentionally slightly ambiguous. It is obvious that a discrete set is strictly contained in a continuous set and then it is an approximation (in the sense of a part) of it. Nevertheless, things completely change if one considers discrete functions, i.e. functions defined on a discrete set of points. The richness of possible behaviors grows drastically with respect to that of continuous functions.

Starting from the last decades of nineteen century, many mathematicians (Weierstrass, Dini, Peano, to quote a few) defined curves (later on called fractals) which were considered like monsters because their shapes were far from the traditional shapes inherited from Euclidean geometry. But those curves, even with a low degree of smoothness, were still continuous. Discrete functions are not granted by such property. Consequently, the richness of behaviours further increases as the recent flourishing (even on commercial calendars!) of strange curves (Julia sets, Mandelbrot, etc) shows. By

*Dedicated to Prof. P. Van der Houwen in occasion of his retirement.

†Dipartimento di Matematica, Università di Bari, Via Orabona 4, I-70125 Bari (Italy), felix@dm.uniba.it, mazzia@dm.uniba.it, fax:+39 080 5460612.

‡Dip. di Energetica, Università di Firenze, via C. Lombroso 6/17, I-50134 Firenze (Italy), trigiant@cesit1.unifi.it.

all means, the use of the computer has enormously encouraged such flourishing.

What about the impact of such curves on other Scientists? Those strictly related to Mathematics for a long tradition, such as Physicists, have had a reaction similar to that of Mathematicians: the monsters should be kept apart, although, as we shall see, a few individuals (for example Poincaré), realized the need of more general models describing the physical world, for example by considering a discrete time and then discrete equations.

Other Sciences, for example Biology, whose approach to Mathematics is more recent, have had a more favourable attitude, certainly because the object of their studies have a more evident discrete nature.

Although firmly rooted in ninety century Mathematics, Numerical Analysis has had a great development after the advent of computers. Computers work on discrete quantities and Numerical Analysis has had a central role in transforming continuous objects (almost universally used by Mathematicians and Physicists) in discrete ones as needed by computers. There is, however, a constraint in this job: the solutions of the discrete equations should have a similar behaviour as those of the continuous equations. In other words Numerical Analysis is as a train on a track. Of course, the constraint defined by the track is the one said above, i.e. the necessity that continuous and discrete solutions look alike. There is no blame on this: even on the track there was so much to do and the enormous development of Scientific Calculus gives a clear evidence of the work done.

It is also clear, however, that outside the track, there is a large land whose exploration has started only recently. numerical analysts were aware of this, but since the land was outside their scopes, they did not pursue in analyzing what they considered the land of errors, instabilities, etc. For example, strange solutions of chaotic nature, called *Ghost solutions*, are generated by the simple Euler or mid-point methods in ranges of the step-number h different from those usually used by Numerical analysts [2, 3].

We wish to attract our attention on the new name of *ghost* instead of the more traditional monster given to such strange solutions which are outside the track.

Is our *forma mentis* which strongly influences us to consider such non conventional solutions as phantoms or, on the contrary, they describe physical reality?

In this paper we shall analyze three examples, taken from Physics and other disciplines which seem to show that the land outside the track has its right to exist in the physical world. In other words, it may happen that the continuous description of the real world is only an approximation of it, which indeed could be of discrete nature.

2 The dynamics of the electron

The problem of stating the equations describing the motion of the electron, started just after its discovery (Thomson 1896). It continues to be a problem, as shown by papers which still appear on it. In the review paper [1] Caldirola gave an historical overview of this classical model. A very rich bibliography can be found in the more recent paper [4]. The names of the greatest physicists that have written on it (Poincaré, Lorentz, Abraham, Fermi, Dirac etc.) clearly show that it is a formidable one, whose solution entails the basic ideas of Physics.

At the beginning (Abraham, 1903) the electron was considered as a rigid sphere, but very soon the model revealed to be inconsistent with other physical requirements. It was corrected by Lorentz (1904): the spherical shape was maintained for the electron at rest while it contracts with ratio $(1-\beta^2)^{1/2}$ (where $\beta = v/c$, v, c are the velocity of the particle and of the light, respectively) in the direction of the motion. This model was more successful, although, few years later it was considered not in agreement with the requests of the new born special relativity theory. In the simplest form (when $\beta << 1$), the equation predicted by the model for the dynamics of the electron, having radius R and charge e, under the action of an external force F, is

$$m_0 \frac{dv}{dt} = F + \Gamma_0, \tag{1}$$

where m_0 is the rest mass of the electron, given by

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{Rc}.$$

An extra force Γ_0 appears here for the first time. Under many forms it was destined, *as a phantom,* to be the source of all troubles for this and all the subsequent models. The form that it assumes in the Lorentz model is

$$\Gamma_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{c}\frac{d^2v}{dt^2} + \sigma_1 R + \sigma_2 R^2 + \dots$$

where the coefficients σ_i contain higher order derivatives of the velocity. Few comments are needed:

- The fact that it depends on higher order derivatives of the velocity makes such equation extraneous to the tradition of Physics, either Newtonian or relativistic and even quantistic, where the equations are always of second order. As a matter of fact, it implies that the motion of the electron, to be completely determined, would need not only the traditional quantities such as the initial position and the initial velocity, but also, for example, the initial acceleration.
- If one tries to avoid this by letting $R \to 0$ (point electron), then the rest mass m_0 diverges.

Many efforts were made to give a meaning to Γ_0. It was said that it is the effect of the radiation of the electron due to the self generated electromagnetic field.

Few years later, the Lorentz equation (1) was abandoned because it is not relativistic invariant.

An improved model, still non relativistic was provided later by Schott (1912) and Page (1918). We report their equation since it is interesting for our reasoning. In short notation, i.e. after summing the series contained in their equations, it can be written as

$$\frac{m_0 c}{2R}\left(1 - e^{-\frac{2R}{c}\frac{d}{dt}}\right) v(t) = F. \tag{2}$$

The above equation still contains derivatives of any order and then the *phantom terms*. It is interesting, however, to observe that the exponential is nothing but the reverse shift operator, well known in discrete mathematics. In fact, by posing

$$h = \frac{2R}{c}, \tag{3}$$

the reverse shift operator is defined by

$$E_h^{-1} v(t) = v(t-h).$$

In every book on discrete equations one finds that

$$E_h = e^{\frac{2R}{c}\frac{d}{dt}}.$$

With this notation, the above equation (2) could be written as

$$\frac{m_0 c}{2R}\left(v(t) - v(t-h)\right) = F \tag{4}$$

showing the essential discrete nature of the equation. More importantly, the *phantom terms* have disappeared. But accepting the discrete equation would imply to introduce a new entity in the Physical world, i.e. a sort of atom of time. This eventually has been done many decades later. Before that, for a long time, Physicists were concerned about the meaning to give to terms in the expansion of $e^{-\frac{2R}{c}\frac{d}{dt}}$. Especially the third of them, the one containing the second derivative of the velocity, which survived in the following model, due to Dirac, was object of intensive studies in the three successive decades, starting from the forties. As already said, it was considered the effect of the radiation of the moving electron.

The model provided by Dirac, in the fundamental work of 1938, in fact, while solves the problem of diverging of the rest mass, still contains the radiating term. The equation, when $\beta << 1$, is

$$m\frac{dv}{dt} = F + \frac{2}{3}\frac{e^2}{c^3}\frac{d^2v}{dt^2}.$$

This equation is similar to the one obtained by Lorentz, except that this time m remains finite even though it is the difference between two diverging terms.

Such equation has been extensively studied, although its solution are often in contrast both with common sense and experimental physical evidence.

We report here two of the most paradoxical behaviors of the solutions in two simple cases.

a) If the external force is due to a positive electric charge, for example a proton, then the solution requires that the electron approaches it until a non zero minimum distance, then stops and comes back with increasing velocity and acceleration. [1]

[1] The beautiful discussion of this case is due to G. Zin. One of us (D.T.) was introduced to this problem by his unique personality, both as a mathematician and in social life.

b) If the external force is a pulse, then the solution prescribes that the electron starts to accelerate before the pulse is active. It is obvious that this contradicts the causality principle.

2.1 The Chronon

In the fifties, Caldirola started to consider the discrete nature of the equation. He gave to the quantity h defined by (3) and having the dimension of time, the name of *chronon*. Moreover, he assumed that

1. the chronon is a universal elementary time;
2. a force, acting upon the electron at a given instant τ of the proper time, induces a sudden transition from the state at time $\tau - 2h$ to the state at time τ;
3. for $h \to 0$ the new equations must recover those of classical dynamics;
4. the laws must be relativistic invariant.

He obtained a difference equation which reduces to the Dirac one when $h \to 0$. The space component of the obtained four dimensional equation in the non relativistic approximation, i.e. $\beta << 1$, is

$$\frac{m_0}{2h}\left(v(t) - v(t-2h)\right) = F, \tag{5}$$

essentially similar to (4).

Suppose now we are in a position of having accepted the discrete solutions described by the previous equation and try to approximate it by a continuous one. The first thing to do is to expand the term $v(t-2h)$ in Taylor series. The second term would be the one containing the second derivative of the velocity, i.e. the radiating term. Would we be tempted to call it a *phantom (or ghost)*? What is certain is that the attempt to give a physical meaning to such terms have had an important role in the history of Physics in the last century.

Of course the introduction of the elementary time cannot be taken thoughtlessly, although it has been invoked by many important Physicists. Starting from Mach and Poincaré (and even before), the idea has shown up several times in the last century. The more recent physicist who have used the discrete time is the Nobel laureate G. 't Hooft [7, 8].

2.2 Overlapping with Numerical Analysis

Returning to the discrete equation for the electron, the most interesting part for us, numerical analysts, is the sequel of the story.

Once the discrete equation for the velocity has been accepted, one has to define the equation relating the position $r(t)$ to $v(t)$ (Caldirola called such equation *transmission law*). The continuous relation is, obviously $v = dr/dt$. On the contrary, the discrete equations are not univocal, as we know very well. In our terminology, one may use explicit Euler, implicit Euler, the trapezoidal rule, the mid-point rule, ecc.

The only difference between us and physicists, when facing the problem of choosing among such discretizations, is that we have in mind the continuous problem and we try to mimic its solutions (we are on the track!). They must be guided by the physical implications that a choice would imply. The final results do not seem to be different. Caldirola chosed the trapezoidal rule, i.e.

$$r(t) - r(t-2h) = h\left(v(t) + v(t+2h)\right),$$

saying that this is the most stable choice. In fact we know that the trapezoidal rule is perfectly stable for fixed h, i.e. his boundary locus is exactly the imaginary axis.

In other cases, for example in the case of radiating electron, he proposed the use of what we call explicit Euler while in the case of absorbing electron the implicit Euler is used instead. Caldirola called such equation the retarded and the advanced form respectively. It is clear why. The explicit Euler method uses information from the last point (past), while the implicit one use the information from the new point (future).

It is also clear why they describe radiating and absorbing particles. A conservative system should have the jacobian of the hamiltonian function with imaginary eigenvalues. When, for example, the explicit Euler is used, the imaginary axis is outside the absolute stability region of the method and then the electron seems to lose energy (radiation). The contrary would happen when using the implicit Euler.

At this point the question becomes of physical nature: is the radiation (or absorption) a physical necessity? If yes, then no objection can be raised in using such non symmetrical methods. If not, then one more condition, for example of conservative type should be added in deriving the equations, in order to avoid other kinds of phantoms.

For the non radiating, non absorbing electron, Caldirola also used the midpoint rule, i.e.

$$r((n+1)2h) - r((n-1)2h) = 4hv(2nh).$$

No objection until the external force in not rapidly varying. On the contrary, when this is the case (in our terminology the stiff case), other kinds of phantoms are ready to come into play. We know, in fact that the absolute stability region of such method is only a small segment of imaginary axis. When the eigenvalues of the Jacobian multiplied by h are outside such segment, then the nature of the problem may significantly change: closed orbits may open and the electron would run away, just as in the case of the field generated by the proton discussed for the Dirac equation. A reminiscence of this could be the fact, as asserted in ([4]), that the discrete approach implies the existence of an upper limit for the eigenvalues of the hamiltonian. Again, is this a real physical requirement, or it is only due to the chosen discretization?

There are other questions which look familiar to us, for example the question of layer solutions when the force strongly varies within an interval of time of order h, which reminds us the stiffness nature of the problem. But we do not pursue this matter further.

Apart from the above consideration, which would suggest a more strictly collaboration among physicists and discrete mathematicians, the new formulation does not suffer from the troubles of the continuous equations. In particular, the motion of the electron is uniquely defined by its initial position and velocity. In a certain sense this is more comfortable than believing to be obliged to know also its initial acceleration, or, even worse, all the initial derivatives.

3 The Verhulst equation

The continuous Verhulst equation

$$p'(t) = rp(t)\left(1 - p(t)\right), \qquad r > 0, \tag{6}$$

describes the evolution of a biological species in an environment with limited resources. It is just a generalization of the Malthus law, for which the resources were considered unlimited. Its solutions, although showing clearly the experimental phenomenon of saturation, are nothing at all special, from the mathematical point of view.

On the contrary, its discrete twin

$$p_{n+1} = p_n + rp_n(1 - p_n), \tag{7}$$

has literally created a revolution in many Sciences. It has introduced, in the seventies, the concept of chaotic behavior. It is known that such behavior is defined by the existence, in the solution, of infinitely many periodic motions.

Few years before, most probably, such kind of solutions would have been placed in the lumber-room of other unconventional solutions. But the demand for applications had made time mature to accept such solutions. In fact, already in 1964 (see [9]), Lorenz was studying such a discrete equation and its periodic solution in relation to climate evolution. At the same equation arrived few years later T. May studying biological problems (see [10, 11]).

This equation has become so popular that it can be considered as one of the superstar equations and hence its fame has gone beyond the limits of specialized literature. Here we use it to reaffirm once again the *leitmotiv* of the present discussion, that is, approximating the continuous by means of the discrete may significantly change the nature of a problem if one is well-disposed to move his mind beyond its track.

Suppose that (6) is not analytically solvable and we (numerical analysts) are asked to simulate the continuous dynamical system by means of a discrete one. This is the analogue of what happens when one numerically solves the linear test problem $y' = \lambda y$, $\lambda < 0$ and finds conditions (A-stability) to retain, inside the discrete solution, the qualitative asymptotic behaviour of the continuous one. Indeed, the analytic solution of the continuous Verhulst equation, clearly shows the global asymptotic stability nature of its equilibrium $\bar{p} = 1$, no matter how the initial condition p_0 or the growth parameter $r > 0$ are chosen; we would like to reproduce this behaviour after the application of a suitable method. With this in mind, we discretize our nonlinear problem (6) using explicit and implicit Euler obtaining respectively

$$p_{n+1} = p_n + hrp_n(1 - p_n), \tag{8}$$

and

$$p_{n+1} = p_n + hrp_{n+1}(1 - p_{n+1}), \tag{9}$$

where $h > 0$ is the step-length. Setting $\lambda = hr$ we see that (8) is nothing but the discrete logistic model (7) (in passing observe that in this case the equation is not always explicitly solvable), while (9) defines an implicit map. We observe that $\bar{p} = 1$ remains an equilibrium point of both (8) and (9) and we are interested in studying its stability character. By linearization one immediately realizes that while no constraint on λ must be imposed in (9) in order to get asymptotic stability, the condition $\lambda \in [0, 2]$ is to be fulfilled in the case we decide to adopt equation (8). Hence, as it happens for the linear test problem we are inclined to suggest the use of implicit Euler because of its independent qualitative behaviour with respect to changes in the parameter λ. We are on the track and the track is Numerical Analysis; the land outside that (in particular the track of Biology) tell us that the solutions of the simpler model represented by equation (7) have a great significance also when $\lambda > 2$ and in particular under chaotic regime.

4 Solitons and the discrete wave equation

The ghost we are dealing with in this section did not appeared as outcome of a computer or as a solution of a mathematical equation. It first appeared in 1834 on a river and it had the privilege to be literally chased. The description of this event is unique in both histories of Mathematics and Physics and deserves to be reported since it seems taken from *Sherlock Holmes* adventures. The writer is J. Scott Russel:

> I was observing the motion of a boat which was rapidly drawn along a narrow channel by a pair of horses, when the boat suddenly stopped, not so the mass of water in the channel which it had put in motion, it accumulated round the prow of the vessel in a state of violent agitation, then suddenly leaving it behind, rolled forward with great

> velocity, assuming the form of a large solitary elevation, a rounded, smooth and well-defined heap of water, which continued its course along the channel apparently without change of form or diminution of speed. I followed it on horseback...

Needless to say, Russel's witness faced great hostility and skepticism from the scientific community (see [12]).

As outcome of a computer it appeared only one century later when three eminent physicists, E. Fermi, J. Pasta and S. Ulam, decided to explain the heat diffusion by means of elementary interactions in a solid body. They discretized the space variable of the wave equation, leaving the time continuous. By the way, we note that such a technique has became popular later on and has assumed the name of *transverse method of line.* More precisely they introduced a nonlinear term involving the space variables, to give an account, by means of a dynamical system from Mechanics, for an irreversible macroscopic process described by the Fourier law. Then they simulated, with the help of a computer, the obtained equations. We quote from Newell the description of the result.

> Now a great surprise was encountered (...). The energy did not thermalize! In fact, after being initially contained in the lowest mode and then flowing back and forth among several low-order modes, the energy eventually recollected into the lowest modes (...) and then the process repeated itself. (...) The system seems to behave like a system of linearly coupled harmonic oscillators whose motion on a torus is quasiperiodic. But how could this be? Why didn't the nonlinearity excite all the Fourier modes?

The following comment by Newell is also interesting:

> The FPU experiment had failed to produce the expected result and indeed the results it did produce challenged (...) the basic thinking of physicists of the day. *Nevertheless, since it was not connected with what was regarded at that time as frontier physics,(...) it could easily have been dismissed, as it was by many, as an anomalous curiosity. (...) Fortunately the curious result of the FPU experiment was not ignored by all.*

The sequel of the story is also interesting. The solitary waves, called *solitons* have been accepted as an important stone of the modern physical world. But still, the discrete nature of the equations which had shown them for the first time were, in a certain sense, rejected. In fact Kruskal and Zabusky did, in the reverse way, what Caldirola had done for the Dirac equation (or what numerical analysts usually do): they found a continuous equation, just expanding in Taylor series the discrete quantities of the FPU model. They imposed that the continuous solutions maintained similar properties as the discrete ones.

As for the Dirac equation, such continuous newborn has order higher then two (actually it is fourth order).

4.1 The complete discrete wave equation

In ([13]) the existence of soliton-like solutions was stated for the linear wave equation discretized with respect both the space and the time. The starting point was the study of the behaviour of the discrete harmonic oscillator

$$y_{n+1} - 2\gamma y_n + y_{n-1} = 0 \tag{10}$$

where $\gamma = 1 - \omega^2\tau^2/2$, with ω^2 the coefficient of the linear spring and τ the elementary discrete time. The obtained solutions are very different from the well known continuous ones. For example it is easily deduced that the existence of bounded solutions requires that $\gamma \in [-1, 1]$. In such a case the solution of (10) is

$$y_n = A\sin(\alpha n\tau + \vartheta); \qquad \cos\alpha\tau = \gamma.$$

Without going into details, we summarize the main differences.

a) Contrary to what happens in the continuous model, the solutions of (10) are in general non periodic except for suitable (in most cases irrational) values of the constant γ which form a dense subset of $[-1, 1]$. This implies that periodic solutions are generated only when γ is known with infinite precision. the precision is finite, then the motion will be non periodic will mimic a combination of periodic solutions with many erent periods (chaotic regime).

b) If one defines a probability density function both for the discrete and the continuous solutions, then such density functions turn out to be the same. In other words, even if the solutions are very different in the two cases, they have the same distribution.

c) In the continuous case there is a one to one correspondence between the minimum period and the frequency. In the discrete case, to a fixed period, say $M\tau$ (we suppose M even for simplicity), there correspond $M/2-1$ values of the frequency, namely $\alpha = \frac{2s\pi}{M\tau}$, $\quad s = 1, \dots, M/2-1$.

Point c) is crucial for an in-depth analysis of the discrete wave equation

$$u_{n,j+1} - 2u_{n,j} + u_{n,j-1} = q^2(u_{n+1,j} - 2u_{n,j} + u_{n-1,j}), \tag{11}$$

because it states the possibility of combining periodic solutions with the same period but different frequencies to generate a localized pulse that travels without dispersion in a generally dispersive field. The positive constant q depends on the properties of the medium and contains information of the discrete time unit τ and the space elementary quantity, say σ. As for the constant γ, solutions that have a physical meaning are obtained when $q \in [0,1]$.

Of course, as in the continuous case, the solutions of (11) can be studied by expanding in linear waves and are therefore linear combinations of plane waves of the form $Ae^{i(\pm kn\sigma \pm \omega j\tau)}$, where n, j are integers while k is the wave-length and ω the frequency. The phase and group velocities are respectively

$$\begin{cases} u_{ph} = \dfrac{\sigma}{\tau}\left|\dfrac{\sin^{-1}(q\sin(k\sigma/2))}{k\sigma/2}\right|, \\ u_{gr} = \frac{\sigma}{\tau} q\cos k\sigma/2\left(1 - q^2\sin^2(k\sigma/2)\right)^{-1/2}, \end{cases}$$

and one gets $u_{ph} = u_{gr} = \sigma/\tau$, for $q = 1$. This limit case is interesting in many respects. As $q \to 1$, all the waves assume the same velocity σ/τ, which turns out to be the maximum allowed in that medium (the existence of a finite limit speed is a direct consequence of the discrete nature of the model).

By continuity when $q \simeq 1$ the dispersion phenomenon is almost absent and the solutions posses the typical features of solitons. For example, periodic (when $q = 1$) or quasi-periodic (when $q \simeq 1$) solutions may be linearly combined to generate a localized pulse that travels maintaining its shape unchanged (or almost unchanged, see Figure 1) even after a collision with another pulse (Figure 2).

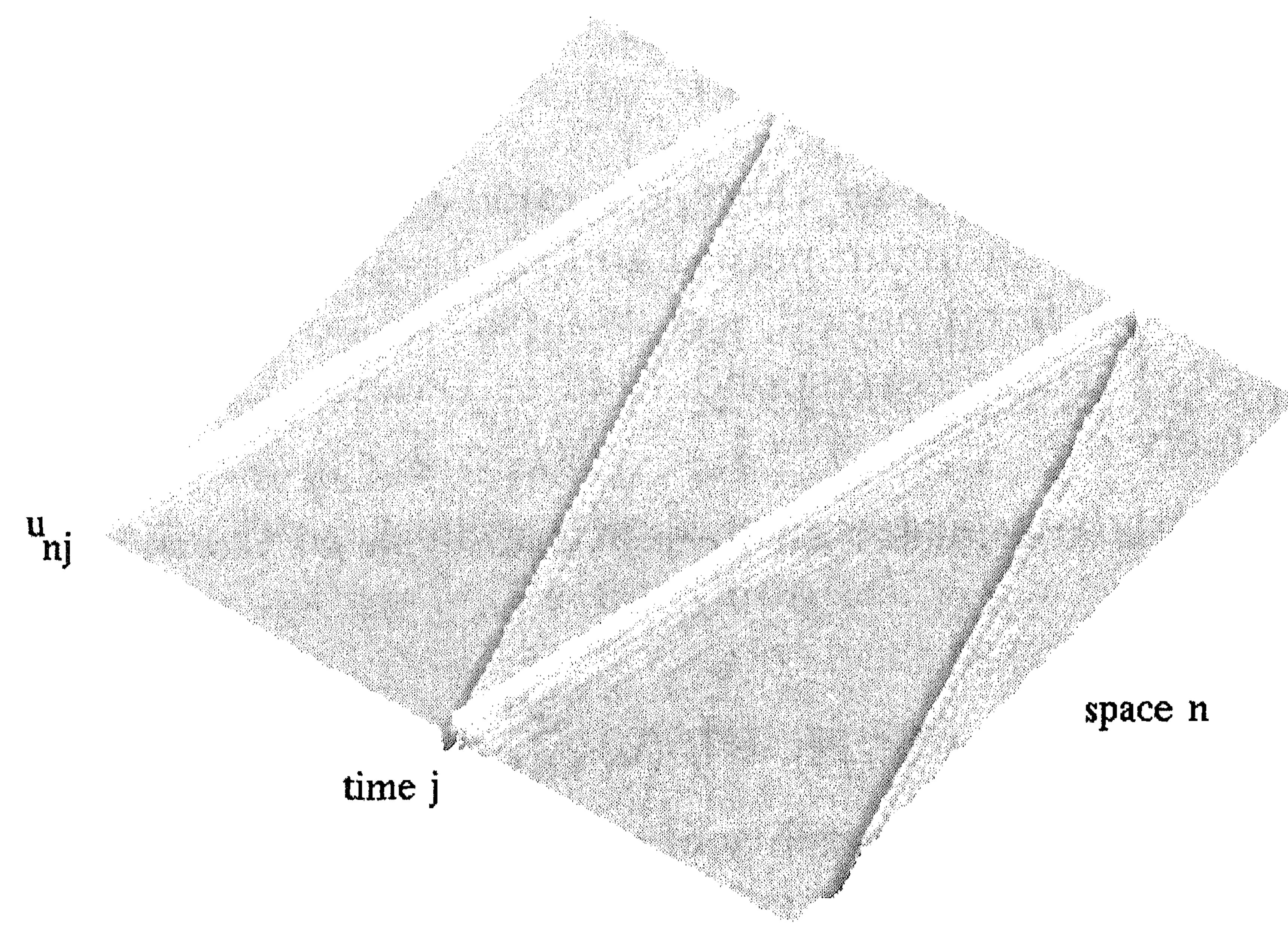


Figure 1: A pulse (soliton-like solution) traveling in a field with a small dispersion factor ($q = .99$)

5 Conclusion

We have briefly presented a few examples of problems where the struggle between the discrete and continuous conception of the physical world is more evident. The matter gives rise to several considerations of different nature, even extraneous both to Mathematics and Physics. Leaving aside a philosophic discussion which is appealing but formidable, we reaffirm the most obvious, i.e. that the continuous world is too much smooth for the needs of applications, and conclude with the invitation to mathematicians to spend more efforts in exploring the wide land of discrete mathematics.

References

[1] P. Caldirola. A relativistic theory of the classical electron. La Rivista del Nuovo Cimento 13 (1979).

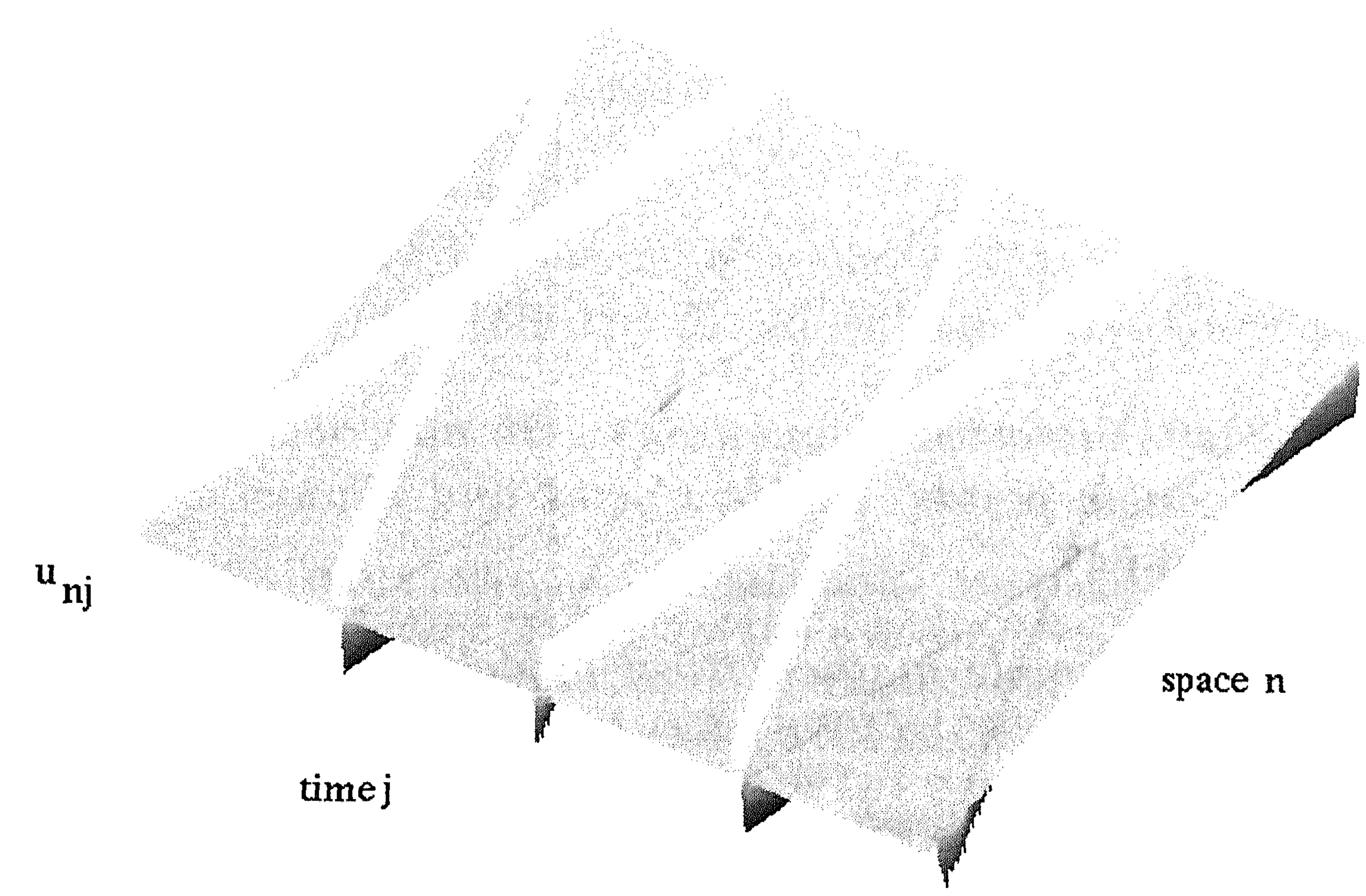


Figure 2: Collision between two pulses in absence of dispersion ($q = 1$)

[2] M. Yamaguti, H. Matano. Euler's Finite Difference Scheme and Chaos. Proc Japan Acad. 55 Ser. A (1979) 78-80.

[3] M. Yamaguti, S. Ushiki. Chaos in Numerical Analysis of Ordinary Differential Equations. Physics 3D (1981) 618-626.

[4] R.H.A. Farias, E. Recami. Introduction of a Quantum of Time (Chronon), and its Consequences for Quantum Mechanics. Available at URL http://www.arXiv.org/abs/quant-ph/9706059.

[5] P.M. Dirac. *Classical theory of radiating electron* Proc. Roy. Soc. 167A 148 (1938).

[6] *Su alcune questioni di elettrodinamica classica relative al moto di un elettrone.* Nuovo Cim. VI, 3 (1949).

[7] G. 't Hooft. *Quantization in space and time in 3 and in 4 space-time dimensions.* Lectures given at NATO Advanced Study Institute. In Cargese 1996, Quantum Fields and Quantum Space Time. Available at URL http://www.arXiv.org/abs/gr-qc/9608037.

[8] G. 't Hooft. *Quantization of point particles in 2+1 dimensional gravity and space-time discreteness.* Available at URL http://www.arXiv.org/abs/gr-qc/9601014.

[9] E.N. Lorenz. *The problem of deducing the climate from the governing equations.* Tellus XVI (1964) 1-11.

[10] R.M. May. *Biological populations with non overlapping generations. Stable points, Stable Cycles and Chaos.* Science, 186 (1974) 546-647.

[11] R.M. May. *Simple mathematical models with complicated dynamics.* Nature, 261 (1976) 469-467.

[12] A.C. Newell. *Solitons in Mathematics and Physics* CBMS 48. SIAM, Philadelphia, (1985).

[13] F. Iavernaro, D. Trigiante. *Soliton-like solutions of the discrete wave equation.* Proceedings of the first World Congress of Nonlinear Analysts, editor V.Lakshmikantham, Walter de Gruyter-Berlin-New York 1996, pp. 1193-1202.

ASPECTS OF STABILITY IN NUMERICAL INITIAL VALUE PROBLEMS

Text of the lecture by Marc Spijker on the occasion of the farewell of Professor Piet van der Houwen

Amsterdam, October 20, 2000

1. Introduction

During the years 1965–1966 a colloquium was held at the "Mathematisch Centrum" (Mathematical Centre) in Amsterdam. The title of this colloquium was "Stabiliteit van Differentieschemas" (Stability of Difference Schemes). Both Piet van der Houwen and myself took part in this colloquium; here we met each other for the first time.

After the colloquium was over, Piet and I have had countless contacts throughout the years. I have found these contacts always extremely pleasant and stimulating. Accordingly, I am glad to give a talk here, and I wish to thank the organizers of this symposium for inviting me.

I feel that the topic of the colloquium in 1965-1966, *Stability of difference schemes*, continued to be one of the central fields of numerical analysis to which, during the past 35 years, Piet made important contributions. In fact, Piet often carried out a stability analysis of numerical methods. He usually based his analysis on the eigenvalues of the matrices under consideration. Using this kind of analysis, he constructed very successfully an impressive collection of stable numerical methods.

Stability analysis of difference schemes has also been one of my own favourite research topics. But, I have often focussed on a different aspect than Piet did. In the rest of this talk I will review a recent result related to my research in numerical stability.

2. The Crank-Nicholson Scheme

As a motivation for the abstract material in the following sections, I start with an example. Consider the simple initial boundary value problem

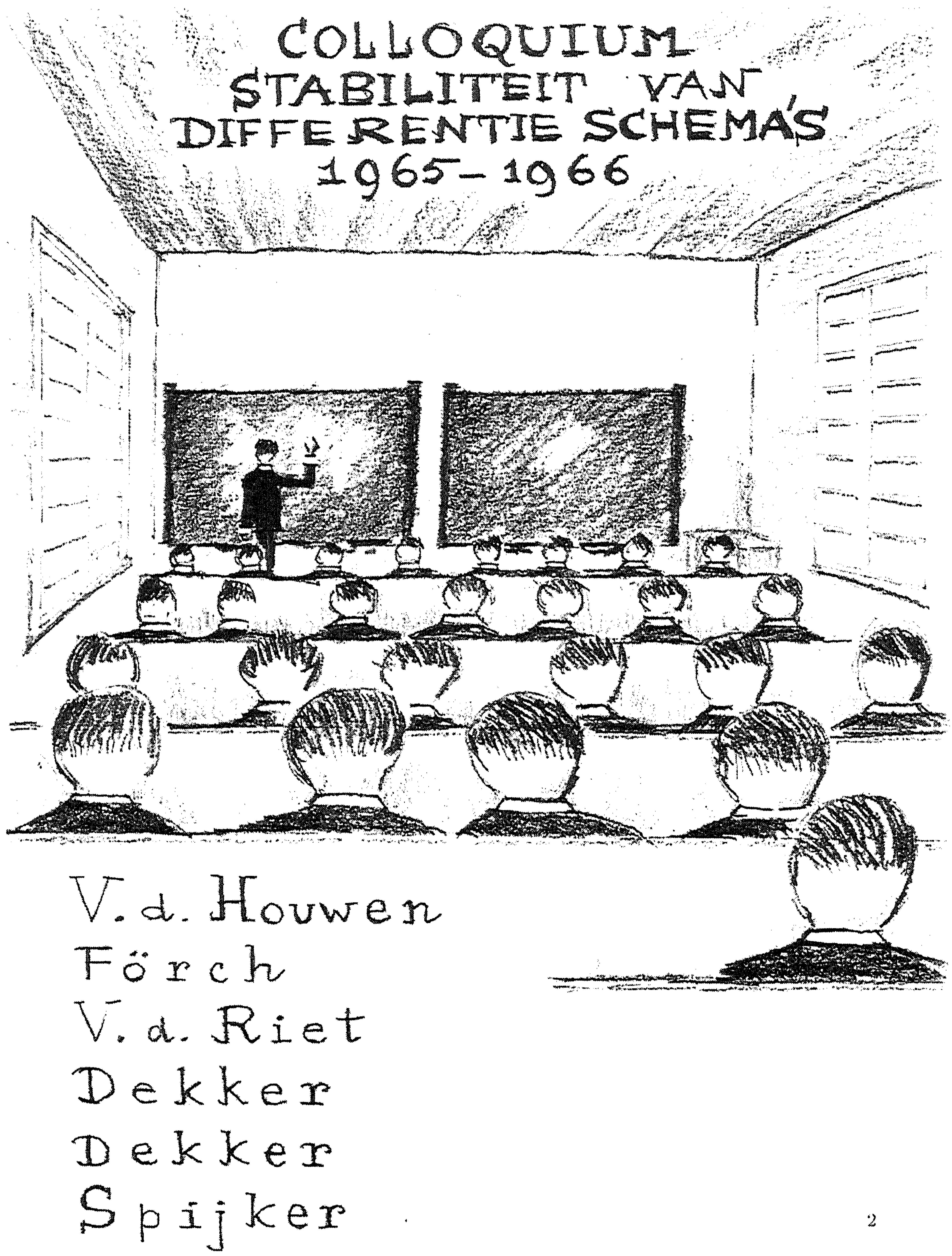
$$u_t(x,t) = u_{xx}(x,t), \quad u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = f(x),$$

where $0 \leq x \leq 1$, $t \geq 0$ and f is a given function.

A well known difference scheme, for approximating the solution $u(x,t)$ to the above problem, is due to *Crank and Nicholson.* It is as follows:

$$\frac{u_m^n - u_m^{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\left[\frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{(\Delta x)^2} + \frac{u_{m-1}^{n-1} - 2u_m^{n-1} + u_{m+1}^{n-1}}{(\Delta x)^2}\right].$$

Here $\Delta t > 0$, $\Delta x = 1/(M+1)$, $m = 1, 2, \ldots, M$ and $n = 1, 2, 3, \ldots$. We define $u_0^n = u_{M+1}^n = 0$ and $u_m^0 = f(m\Delta x)$, so that u_m^n approximates $u(m\Delta x, n\Delta t)$.


COLLOQUIUM
STABILITEIT VAN
DIFFERENTIE SCHEMA'S
1965 - 1966
V. d. Houwen
Förch
V. d. Riet
Dekker
Dekker
Spijker

2

The above difference scheme can be rewritten concisely in the form

$$u_n = Tu_{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Here u_n stands for the column vector, in the M-dimensional space $\mathbb{C}^M$, with components $u_1^n, u_2^n, \dots, u_M^n$. Further, T is an $M \times M$ matrix depending only on the integer M and the ratio $\sigma = \Delta t/(\Delta x)^2$, so that one may write

$$T = T(M, \sigma).$$

In the following, I will use the term *stable*, to designate the situation where all relevant powers T^n are of moderate size. In dealing with this concept of stability in a quantitative sense, one may focus on the *maximum norm* $|x|_\infty$ for vectors $x \in \mathbb{C}^M$. I shall use the notation

$$\|A\|_\infty = \sup\{|Ax|_\infty/|x|_\infty : \quad x \in \mathbb{C}^M, x \neq 0\},$$

for $M \times M$ matrices A.

It is a natural question of whether the Crank–Nicholson scheme is stable in the sense that a (moderate) constant γ exists with

$$\|T(M,\sigma)^n\|_\infty \leq \gamma \quad (\text{for all } M \geq 1,\ \sigma > 0,\ n \geq 1).$$

Note that this question is nontrivial, in particular because an infinite *family of matrices* is involved (and not just one fixed matrix T).

In the following I will shortly review a general theory by means of which questions of the above type can be answered.

3. Using Resolvents in Stability Analysis

In this section and the following one, I deal with a general framework; I assume that

(I) $|\cdot|$ is a norm on $\mathbb{C}^M$, and
$\|A\| = \sup\{|Ax|/|x| : \quad x \in \mathbb{C}^M,\ x \neq 0\}$ for $M \times M$ matrices A;

(II) T is an $M \times M$ matrix all of whose eigenvalues λ have a modulus $|\lambda| \leq 1$.

Under these assumptions, I aim at establishing suitable stability estimates of the form $\|T^n\| \leq \gamma$ (for $n \geq 1$).

Let

$$R(z) = (I - zT)^{-1},$$

where z is a complex variable with modulus $|z| < 1$. I shall refer to $R(z)$ as the *resolvent* of T at the point z.

Resolvents are very useful in deriving stability estimates. The reason is related to the fact that

(1a) $$R(z) = 1 + zT + z^2T^2 + z^3T^3 + \cdots \quad (\text{for } |z| < 1).$$

Let Γ denote the positively oriented circle $|z| = r$, for some r with $0 < r < 1$. We have

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{dz}{z^k} = \begin{cases} 1 & (\text{for } k = 1), \\ 0 & (\text{for } k \neq 1). \end{cases} \tag{1b}$$

A combination of (1a) and (1b) shows that

$$T^n = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{1}{z^{n+1}} R(z)dz. \tag{2}$$

This integral representation makes clear that information about $R(z)$ can be exploited in estimating the norm of T^n.

Under various conditions on $R(z)$, interesting upper bounds on $\|T^n\|$ were obtained in the literature, essentially by using (2). Some of these results appeared in journals on pure mathematics (functional analysis), others in journals on applied mathematics (numerical analysis).

In the following section I will review one of the conditions on $R(z)$ (together with corresponding estimates of $\|T^n\|$) which has been considered in the literature since about 5 decades.

1. A Useful Resolvent Condition

Under the above Assumptions I, II one may consider the following resolvent condition:

$$\|(I - zT)^{-1}\| \leq \frac{L_1}{|z - z_1|} + \frac{L_2}{|z - z_2|} + \cdots + \frac{L_k}{|z - z_k|} \quad (\text{for } |z| < 1). \tag{3}$$

Here $k \geq 1$ denotes a fixed integer, and $L_1, L_2, \ldots, L_k$ are real constants. Further, $z_1, z_2, \ldots, z_k$ denote different points on the unit circle $|z| = 1$ in the complex plane.

Under condition (3), as well as under variants to this condition, estimates of $\|T^n\|$ were derived in the literature. Below I give a short historical survey:

In 1953,	R.K. Ritt proved (under a variant to (3) with $k = 1$):	$\lim_{n\to\infty} \|T^n\|/n = 0$.
In 1986,	E. Tadmor stated (under (3) with $k \geq 1$):	$\sup_n \|T^n\|/\log n < \infty$.
In 1993,	O. Nevanlinna proved (under a stronger version of (3) with $k = 1$):	$\sup_n \|T^n\| < \infty$.
In 1996,	M.N. Spijker & F.A.J. Straetemans proved (under a variant to (3) with $k \geq 1$):	$\sup_n \|T^n\| < \infty$.
In 1999,	Y.Lyubich proved (under (3) with $k = 1$):	$\sup_n \|T^n\| < \infty$.
In 1999,	B. Nagy & J. Zemánek proved (under (3) with $k = 1$):	$\sup_n \|T^n\| < \infty$.

Unlike most of the results obtained by the above authors, the following theorem gives a very transparent upper bound on $\|T^n\|$.

Theorem 1 (N. Borovykh, D. Drissi & M.N. Spijker, 1999). Condition (3) implies

$$\|T^n\| \leq \tfrac{e}{2}(L_1 + L_2 + \cdots + L_m)^2. \tag{4}$$

Note: Suppose one is interested in the size of $\|T^n\|$, for all T belonging to some (possibly infinite) family of matrices. Assume all of these matrices satisfy (3), with the same k and L_j. Then (4) yields an upper bound that is valid *uniformly for all T in the family.*

5. An Application to the Crank–Nicholson Scheme

In order to illustrate the above theorem, I return to the Crank–Nicholson scheme.
Consider the matrix

$$T = T(M, \sigma)$$

and the norm

$$|\cdot| = |\cdot|_\infty.$$

It is rather easy to see that the Assumptions I, II are fulfilled in the situation at hand. Moreover we have

Lemma 2 (N. Borovykh & M.N. Spijker, 1999). Let $M \geq 1$ and $\sigma > 0$ be arbitrary. Then T satisfies (3) with $k = 2$, $z_1 = 1$, $z_2 = -1$ and $L_1 = \sqrt{2}$, $L_2 = 1 + \sqrt{2}$.

A combination of Theorem 1 and Lemma 2, shows that

$$\|T(M,\sigma)^n\|_\infty \leq \tfrac{e}{2}(\sqrt{2} + (1 + \sqrt{2}))^2.$$

In conclusion, we have

Theorem 3. For any integer $M \geq 1$ and ratio $\sigma = \Delta t/(\Delta x)^2 > 0$, the Crank–Nicholson matrix $T(M, \sigma)$ allows the stability estimate

$$\|T(M,\sigma)^n\|_\infty \leq 19.9207\cdots \quad \text{(for all } n \geq 1).$$

Note. The above estimate amounts to an improvement over what we could find in the literature; the best upper bound for $\|T(M,\sigma)^n\|_\infty$ thus far was obtained in 1964 by S.I. Serdyukova. She proved

$$\|T(M,\sigma)^n\|_\infty \leq 23 \quad \text{(for all } n \geq 1).$$

Stability conditions for the convection-diffusion equation using the SHK Runge-Kutta method

P. Wesseling TU Delft

1 Introduction

Because numerical stability looms large in the oeuvre of Piet van der Houwen, I thought he might find the following note of interest. In [8] a system of three-dimensional convection-diffusion-reaction equations is considered, that describes transport of salinity, pollutants, suspended materical etc. This is a fairly large paper, covering many aspects, such as fractional step methods and stabilized Runge-Kutta methods. One of these Runge-Kutta methods seems particularly attractive for convection dominated problems. Let us call this the SHK Runge-Kutta method, with reference to the surnames of the authors. In the following, a handy technique to derive von Neumann stability conditions is presented and applied to the SHK Runge-Kutta method.

2 Discretization

To make von Neumann stability analysis applicable, we simplify the equations considered in [8] to the constant coefficients convection-diffusion equation:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + L\varphi = 0\ , \quad L\varphi = \sum_{\alpha=1}^{m} (u_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha} - \varepsilon \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2})\varphi\ ,$$

with m the number of space dimensions. Assuming a uniform grid, we discretize the Laplacian in the usual way and use the κ-scheme for convection, and obtain the following semi-discretized system:

$$\frac{d\varphi_j}{dt} + L_h\varphi_j = 0\ , \quad L_h = (C_h + D_h)/\tau\ ,$$

with τ the time step (to be used later), $j = (j_1, ..., j_m)$, $j_\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, ...\}$, and

$$\begin{aligned} C_h &= \frac{1}{4}\sum_\alpha c_\alpha[(1-\kappa)\varphi_{j-2e_\alpha} - (5-3\kappa)\varphi_{j-e_\alpha} + (3-3\kappa)\varphi_j \\ &\qquad + (1+\kappa)\varphi_{j+e_\alpha}]\ , \\ D_h &= \frac{1}{2}\sum_\alpha d_\alpha(-\varphi_{j-e_\alpha} + 2\varphi_j - \varphi_{j+e_\alpha})\ , \end{aligned}$$

where $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)$ etc., and

$$c_\alpha = u_\alpha \tau / h_\alpha \ , \quad d_\alpha = 2\varepsilon\tau / h_\alpha^2 \ ,$$

with h_α the mesh size in the x_α-direction. Here we assume $u_\alpha \geq 0$; the contrary case may be treated by symmetry. The dimensionless numbers c_α and d_α are called the Courant-Frederichs-Levy (CFL) and diffusion numbers, respectively. The scheme studied in [8] employs the second order central scheme for convection, which corresponds to $\kappa = 1$. For $-1 \leq \kappa < 1$ an upwind bias is obtained.

3 Properties of the symbol

With von Neumann stability analysis, one postulates

$$\varphi_j(t) = b(t)e^{ij\theta} \ , \quad j\theta = j_1\theta_1 + \cdots + j_m\theta_m \ , \quad 0 \leq \theta_\alpha < 2\pi \ .$$

One finds

$$\frac{db}{dt} = -\hat{L}_h(\theta)b \ , \quad \hat{L}_h(\theta) = e^{-ij\theta} L_h e^{ij\theta} \ ,$$

where $\hat{L}_h$ is called the symbol of L_h. Discretization is completed by introducing a time stepping method, resulting in a sequence $b^0, b^1, ...$, with b^n an approximation to $b(n\tau)$, with τ the time step, assumed constant. The scheme is called stable if $\{|b^n|\}$ is non-increasing. For the symbol we find

$$\begin{aligned}
&\tau\hat{L}_h = \hat{C}_h + \hat{D}_h \ , \\
&\hat{C}_h(\theta) = \gamma_1(\theta) + i\gamma_2(\theta) \ , \quad \hat{D}_h(\theta) = \delta(\theta) \ , \\
&\gamma_1(\theta) = 2(1-\kappa)\sum_\alpha c_\alpha s_\alpha^2 \ , \quad \gamma_2(\theta) = \sum_\alpha c_\alpha\{(1-\kappa)s_\alpha + 1\}\sin\theta_\alpha \ , \\
&\delta(\theta) = 2\sum_\alpha d_\alpha s_\alpha \ , \quad s_\alpha = \sin^2 \tfrac{1}{2}\theta_\alpha \ .
\end{aligned}$$

The stability domain S of time stepping methods for the differential equation $dy/dt = \lambda y$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (the complex plane) is defined as

$$S = \{\lambda\tau \in \mathbb{C} : \{|y^n| \text{ is not increasing}\} \ .$$

This leads to the stability condition that we will use:

$$S_L \subseteq S \ , \quad S_L \equiv \{-\tau\hat{L}_h(\theta) : \forall\theta\} \ .$$

The stability domain S is easy to come by, as shown in textbooks such as [3], [4]. For the SHK method S is shown in Fig. 1. Because of symmetry with respect to the real axis, only the upper half is shown. But it is hard to get a grip on S_L. Usually, the property $S_L \subseteq S$ is studied directly for a particular time stepping method, giving results only for that method. For another time stepping method, the analysis has to be redone completely. Our strategy here is to first derive some properties of S_L, which can then be reused in the stability analysis of various time stepping methods.

First, we take an easy case. With the central scheme for convection and no diffusion we obviously have

Property 1 If $\kappa = 1$ and $\varepsilon = 0$ then

$$S_L = \{z = iy, \quad y \in [-\sum_\alpha c_\alpha, \sum_\alpha c_\alpha]\}$$

This means that S_L is a segment of the imaginary axis.

For $\kappa \neq 1$ and/or $\varepsilon \neq 0$, S_L is hard to determine exactly, but we can give some inclusions.
In [9] the following is shown, with $\tilde{d}_\alpha \equiv d_\alpha + (1-\kappa)c_\alpha$, $\tilde{d} \equiv \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha$:

Property 2 If

$$\tilde{d} \leq \frac{a}{2} \quad \text{and} \quad \sum_\alpha c_\alpha \leq b/(2-\kappa)$$

then S_L is contained in the rectangle defined by

$$-a \leq v \leq 0\,, \quad |w| \leq b\,, \quad v + iw = z\,.$$

The first condition is necessary.

Property 3 If

$$\tilde{d} \leq \frac{a}{2} \quad \text{and} \quad \frac{2\tilde{d}}{b^2}\sum_\alpha c_\alpha^2/\tilde{d}_\alpha \leq (2-\kappa)^{-2}(1+\sqrt{1-4\tilde{d}^2/a^2})$$

then S_L is contained in the left half of the ellipse given by

$$(v/a)^2 + (x/b)^2 = 1\,, \quad v + iw = z\,.$$

The first condition is necessary.

These properties can be used to derive stability conditions. More such properties are given in [9], but these are not useful for deriving stability conditions for the SHK Runge-Kutta method. However, for other time stepping methods, especially if S does not contain a segment of the imaginary axis, the geometric figures of Fig. 1 (half ellipse and rectangle) do not fit inside S. For such cases, similar properties as above are derived for other geometric figures in [9].

Here we include a proof of Property 3; it is much easier to prove Property 2. Necessity of the first condition follows by taking $\theta_1 = \ldots = \theta_m = \pi$. We continue with sufficiency. That $-\tau \hat{L}_h$ is not in the right half of the ellipse follows from $\delta + \gamma_1 \geq 0$. It reamains to show that

$$\left(\frac{\delta+\gamma_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{b}\right)^2 \leq 1 \; .$$

Writing $\tilde{c}_\alpha = (1-\kappa)c_\alpha$ for brevity, since $0 \leq s_\alpha \leq 1$ we have

$$(\delta+\gamma_1)^2 = 4[\sum_\alpha (d_\alpha s_\alpha + \tilde{c}_\alpha s_\alpha^2)]^2 \leq 4[\sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha]^2 \; .$$

Since $\tilde{d}_\alpha \geq 0$ we may write $\tilde{d}_\alpha s_\alpha = \sqrt{\tilde{d}_\alpha}(s_\alpha \sqrt{\tilde{d}_\alpha})$. The Schwartz inequality gives

$$(\delta+\gamma_1)^2 \leq 4\tilde{d} \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha^2 \; . \tag{1}$$

Furthermore, writing $\bar{\kappa} = 1-\kappa$ for brevity, we have

$$\gamma_2^2 = [\sum_\alpha (c_\alpha/\sqrt{\tilde{d}_\alpha})\{\sqrt{\tilde{d}_\alpha}(\bar{\kappa} s_\alpha + 1)\sin\theta_\alpha\}]^2 \; .$$

By applying Schwartz we obtain, noting that $\sin^2\theta_\alpha = 4s_\alpha^2(1-s_\alpha^2)$,

$$\gamma_2^2 \leq 4 \sum_\alpha c_\alpha^2/\tilde{d}_\alpha \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha (1-s_\alpha)(\bar{\kappa} s_\alpha + 1)^2) \; .$$

Since $|s_\alpha| \leq 1$ it follows that

$$\gamma_2^2 \leq 4(2-\kappa)^2 \sum_\alpha c_\alpha^2/\tilde{d}_\alpha \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha (1-s_\alpha) \; .$$

y using the second condition of Property 3 we rewrite this as

$$\left(\frac{\gamma_2}{b}\right)^2 \leq \frac{4\tilde{d}}{a^2} p \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha (1-s_\alpha) \; , \quad p = \tfrac{a^2}{2\tilde{d}^2}(1+\sqrt{1-4\tilde{d}^2/a^2}) \; . \tag{2}$$

Combination of (1) and (2) gives

$$\left(\frac{\delta+\gamma_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_2}{b}\right) \leq \frac{4\tilde{d}}{a^2} \sum_\alpha \tilde{d}_\alpha s_\alpha [s_\alpha + p(1-s_\alpha)] \; .$$

Since $p \geq 2$, $\max\{s(s+p(1-s) : 0 \leq s \leq 1\} = p^2/[4(p-1)] = a^2/(4\tilde{d}^2)$, so that

$$\left(\frac{\delta+\gamma_1}{a}\right) + \left(\frac{\gamma_2}{b}\right) \leq 1$$

and the proof is completed.

4 Stability conditions

The SHK Runge-Kutta method applied to $dy/dt = \lambda y$ is given by

$$\begin{aligned} y^* &= y^n + \frac{1}{4} z y^n , \\ y^{**} &= y^n + \frac{1}{3} z y^* , \\ y^{***} &= y^n + \frac{1}{2} z y^{**} , \\ y^{n+1} &= y^n + z y^{***} , \end{aligned}$$

where $z = \lambda\tau$. This gives

$$y^{n+1} = P(z) y^n , \quad P(z) = 1 + z(1 + \frac{1}{2} z(1 + \frac{1}{3} z(1 + \frac{1}{4} z))) .$$

The stability domain S is given by

$$S = \{z \in \mathbb{C} : |P(z)| \leq 1\} ,$$

and is depicted in Fig. 1. Since $|P(i\sqrt{8})| = 1$, ∂S intersects the imagi-

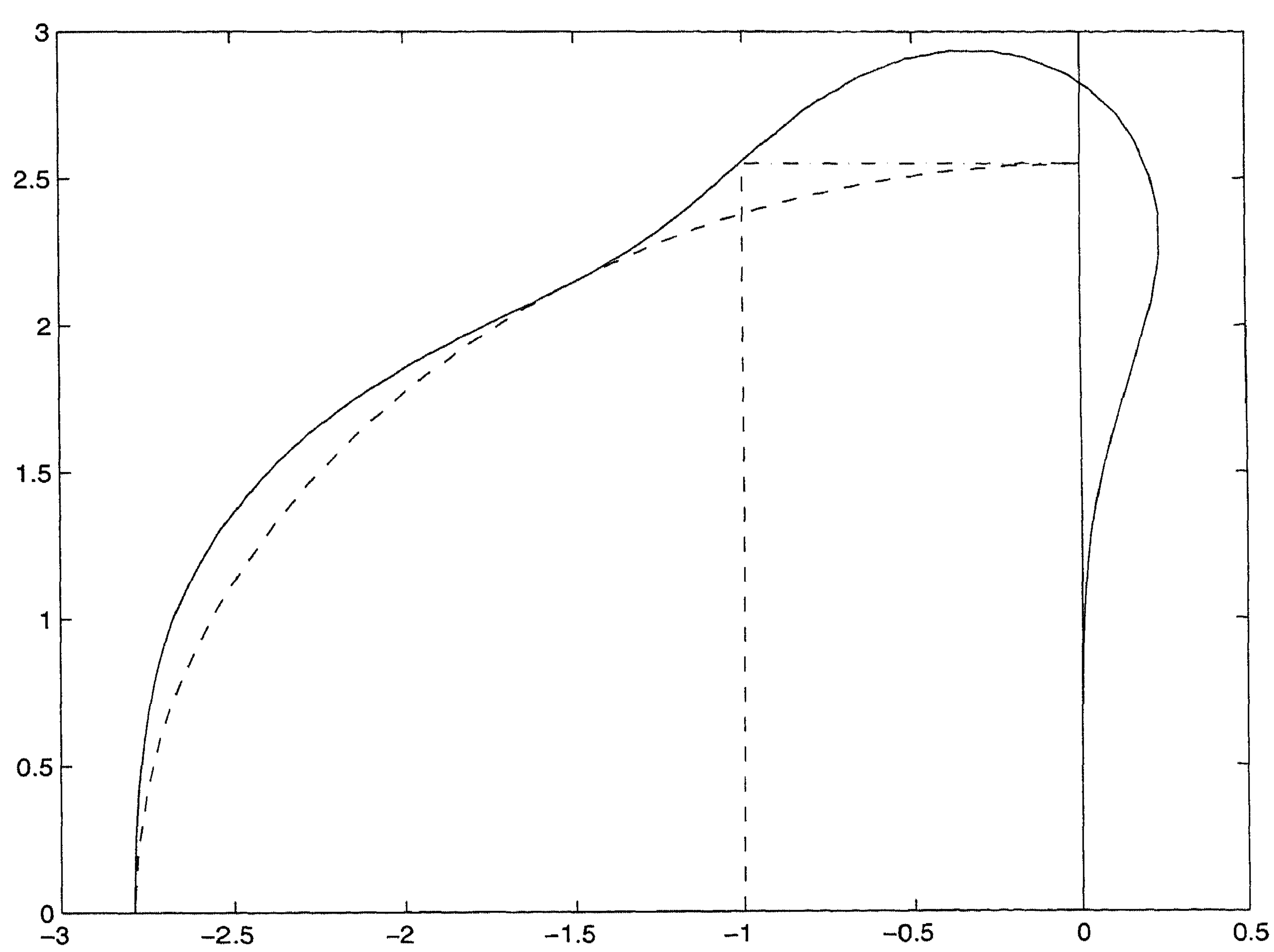


Figure 1: Stability domain of SHK Runge-Kutta method with ellipse and rectangle

nary axis in $z = i\sqrt{8}$. In the case $\kappa = 1$, $\varepsilon = 0$ the stability condition $S_L \subseteq S$ gives with Property 1

$$\sum_\alpha c_\alpha \leq \sqrt{8} ,$$

which gives the following time step restriction:

$$\tau \leq \sqrt{8} / \sum_\alpha u_\alpha / h_\alpha .$$

This condition is also given in [8]. From the derivation it follows that this condition is necessary and sufficient. With Properties 2 and 3 we can also handle the more general case. By trial and error we find that the rectangle of Property 2 is inside S if $a = 1$, $b = 2.55$, and the ellipse of Property 3 is inside S if $a = 2.7853$, $b = 2.55$; see Fig. 1. Property 2 gives us the following stability condition:

$$\tilde{d} \leq \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad \sum_\alpha c_\alpha \leq 2.55/(2-\kappa) ,$$

This results in the following time step restriction:

$$\begin{aligned} \tau &\leq \tau_1 \quad \text{and} \quad \tau \leq \tau_2 , \\ \tau_1 &= \{2\varepsilon \sum_\alpha [(2 + (1-\kappa)p_\alpha) h_\alpha^{-2}]\}^{-1} , \quad p_\alpha = u_\alpha h_\alpha / \varepsilon , \\ \tau_2 &= 2.55\{(2-\kappa) \sum_\alpha u_\alpha / h_\alpha\}^{-1} . \end{aligned} \tag{3}$$

Property 3 gives the following time step restriction:

$$\tau \leq \tau_3 \quad \text{and} \quad \tau \leq \tau_4 , \tag{4}$$

with $\tau_3 = 2.7853\tau_1$ and

$$\tau_4 = \frac{2.55}{(2-\kappa)} \{2 \sum_\alpha [(2 + (1-\kappa)p_\alpha)/h_\alpha^2] \sum_\alpha [u_\alpha^2 / (2 + (1-\kappa)p_\alpha)]\}^{-1/2} ,$$

where we are a bit conservative by neglecting the factor $1 + \sqrt{1 - 4\tilde{d}^2/a^2}$ for simplicity. Although it is easy to check in practice whether a given time step τ satisfies one of the (sufficient) stability conditions (3) or (4), the expressions for $\tau_1, ..., \tau_4$ are a bit complicated. But in one space dimension simplification occurs. One obtains

$$\begin{aligned} \tau_1 &= h^2/[4\varepsilon + (2-2\kappa)uh] , \\ \tau_2 &= 2.55h/[(2-\kappa)u] , \quad \tau_4 = \tau_2/\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Conditions (3) and (4) are merely sufficient, and it is not known how conservative they are. Partly this depends on the degree to which the geometric figures chosen (rectangle and half ellipse in the present case) fill out S, but the question remains: how conservative are Properties 3 and 4? Here we will not go into this further.

5 Final remarks

The lack of sufficient stability conditions for many frequently used numerical schemes for partial differential equations is surprising. Often, practitioners proceed by trial and error, sometimes guided by necessary conditions derived from evaluation of the symbol for special values of the Fourier wave numbers. The technique described above makes it easy to derive sufficient stability conditions for the convection-diffusion equation with general time stepping methods. Our technique is, however, not applicable to mixed schemes, where different terms are disretized in time with different methods, for example, diffusion implicit, convection explicit. But in special circumstances, for instance, when the symbol of the convection discretization is purely imaginary, the approach described is applicable to mixed schemes; see [9]. This includes mixed schemes used for large-eddy simulation of turbulent flows, such as the leapfrog-Euler method ([1], [2], [7]) or the Adams-Bashfort-Euler method ([5]).

The essential simplifying feature of our approach lies in the fact, that we do not prove that the geometric figures selected (such as the rectangle for Property 2 and the half ellipse for Property 3) are included in the stability domain S, but allow ourselves to be satisfied by visual inspection of Fig. 1. Rigorous proofs, such as those using Schur-Cohn theory for multistep methods ([6]) are more difficult. For every multistep method one has to start from scratch, and the complexity of the analysis increases rapidly with the order of the multistep method. Our approach does not get more complicated as the order of the method increases, and applies equally to Runge-Kutta methods, because all that is needed is a picture of the stability domain. Applications to numerical schemes frequently used in computational fluid dynamics are given in [10].

References

[1] J.W. Deardorff. A numerical study of three-dimensional turbulent channel flow at large Reynolds numbers. *J. Fluid Mech.*, 41:453–480, 1970.

[2] J.G.M. Eggels, F. Unger, M.H. Weiss, J. Westerweel, R.J. Adrian, R. Friedrich, and F.T.M. Nieuwstadt. Fully developed pipe flow: a comparison between direct numerical simulation and experiment. *J. Fluid Mech.*, 268:175–209, 1994.

[3] E. Hairer, S.P. Norsett, and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. Vol. 1. Nonstiff problems.* Springer, Berlin, 1987.

[4] E. Hairer and G. Wanner. *Solving ordinary differential equations. Vol. 2. Stiff and differential-algebraic problems.* Springer, Berlin, 1991.

[5] J. Kim and P. Moin. Application of a fractional-step method to incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comp. Phys.*, 59:308–323, 1985.

[6] J.J.H. Miller. On the location of zeros of certain classes of polynomials with applications to numerical analysis. *J. Inst. Math. Appl.*, 8:397–406, 1971.

[7] M.J.B.M. Pourquié. *Large-eddy simulation of a turbulent jet.* PhD thesis, Delft University of Technology, 1994.

[8] B.P. Sommeijer, P.J. van der Houwen, and J. Kok. Time integration of three-dimensional numerical transport models. *Appl. Numer. Math.*, 16:201–225, 1994.

[9] P. Wesseling. Von Neumann stability conditions for the convection-diffusion equation. *IMA J. Num. Anal.*, 16:583–598, 1996.

[10] P. Wesseling. *Principles of computational fluid dynamics.* Springer, Berlin, 2000. To appear.

RK and MRILU

Fred W. Wubs

Abstract

In this contribution the computational work of solving systems arising in implicit Runge-Kutta methods is studied by some experiments. As solution method the multi-level preconditioner MRILU is used combined with BICGSTAB. The experiments show that the amount of work per stage of a fully implicit Runge-Kutta method is about twice that of a single-stage or a diagonal implicit Runge-Kutta method.

1 Introduction

In the title of this contribution one finds the abbreviations RK which stands for Runge-Kutta method and MRILU which stands for Matrix Renumbering ILU. The former is a class of methods for time integration, extensively studied by Piet van der Houwen and his coworkers. The latter is a method for the solution of sparse linear systems which has been developed in the numerics group at the University of Groningen. In this contribution I want to combine these two methods and show how MRILU performs on a system originating from an implicit Runge-Kutta method with a full tableau.

First I want to point out why I am interested in implicit methods. During my stay at CWI (1983-1987), I worked on the implementation of a shallow-water equation model on the vector computer CYBER 205. Based on the experiences of my advisors, Piet and Ben, it was decided to use an explicit method. This would (and did) avoid a lot of difficulties which accompanies the implementation of an implicit method on a vector computer. We chose for the classical Runge-Kutta method because of its favourable stability properties for wave problems. However, at that time the standard method in the code used by the public works was an ADI type method developed by G.S. Stelling. This implicit method allows the use of time steps substantially larger than those allowed by the stability constraint of the classical Runge-Kutta method. However, the error due to the ADI splitting appeared to be substantial for flows which were not parallel to one of the grid lines. Hence, Stelling c.s. were also exploring fully implicit methods. In our case we could relax the stability constraint of the Runge-Kutta method by smoothing of the right-hand side. However, this procedure is, like the ADI method, successively applied in two directions, and hence suffers from an error due to splitting as well. Due to the thusfar mentioned difficulties of explicit and ADI methods, I became interested in implicit methods. However, in implicit methods a linear system has to be solved which often forms the bottleneck in the computations.

During and after my stay at CWI, I could not get rid of the idea that it would be ideal if one could use a fully implicit method in which the linear solver exploits the stronger diagonal for small time steps. During my CWI time I started, together with Erik de Goede, looking at truncated forms of cyclic reduction and found that in one dimension such methods can be constructed [5]. Generalisation to higher dimensions pointed in the direction of nested dissection and multi-grid like methods. In Groningen these ideas, among others, lead to the sparse linear system solvers NGILU [1] and MRILU [2].

The numerics group in Groningen is also working on fluid flow problems and also there implicit methods are being implemented. Currently, simple techniques like the backward Euler method and the trapezium rule are used. But, why not use more sophisticated procedures like full-tableau RK methods. The drawback of these methods is that the system to be solved becomes more difficult. The retirement of Piet gave me an additional argument to do some experiments in order to find out how computationally intensive these methods are. So, I applied MRILU to systems arising from the use of Gauss methods for a parabolic model problem.

2 Model problem

I don't want to go into the details of space discretizing a parabolic equation, but simply pose the ordinary differential equation I started with:

$$\frac{d}{dt}u = F(u,t) \equiv J\ u + g(t), \tag{1}$$

where the Jacobian matrix J is defined by

$$J = (I \otimes D) + (D \otimes I).$$

Here $\otimes$ denotes the Kronecker product operator, I is an identity matrix of order n and D is a tri-diagonal matrix of the same order with a -2 on the diagonal and a 1 on both off-diagonals. Hence, up to a factor depending on the grid size, J corresponds to the standard 5-point discretization of the Laplace operator on a square domain with Dirichlet boundary conditions. We left the factor out in order to have only the time step as parameter in the computations. By a rescaling of t this factor can be easily brought in again, hence, this is not a restriction of the general case.

For later use I mention here that all eigenvalues of J are in the interval $(-4, 0)$.

3 Linear systems from RK methods

In this section I recall some material related to solving the linear systems in implicit Runge-Kutta methods (IRK), which I took from [3, Section IV.8].

The systems to be solved in IRK methods can be written in the form

$$(I_J \otimes I_A - hJ \otimes A)x = b, \tag{2}$$

where I_A and I_J are identity matrices of order equal to that of A and J, respectively, and A is part of the Butcher tableau

$$\begin{array}{c|c} c & A \\ \hline 0 & d^T \end{array}.$$

I will consider three equivalent forms of this system, which I will call the full system, the reduced system and the complex system.

Full system This system is obtained from (2) by premultiplication of $I_J \otimes A^{-1}$, which yields the in general sparser system

$$(I_J \otimes A^{-1} - hJ \otimes I_A)x = \tilde{b}, \tag{3}$$

where $\tilde{b} = (I_J \otimes A^{-1})b$.

In order to get some idea of the type of problem we are dealing with, I try to determine the eigenvalues of the matrix. By postmultiplication of $P \otimes Q$, where P and Q are the matrices containing the eigenvectors of J and A respectively, and premultiplication by its inverse, I find the eigenvalues

$$1/\lambda_A - h\lambda_J,$$

where λ_A and λ_J are eigenvalues of the matrices A and J, respectively. Since λ_J is negative real in my experiments and λ_A is positive (but often complex), we have that the eigenvalues of the whole matrix are in the positive half plane.

Reduced system By using a real Schur normal form of A, system (3) can be reduced to a series of smaller systems. Each of those subsystems is of the form (3) with A of order 1 or 2. In this way, the general case can be reduced which has important implications for storage and run time.

Complex system The complex system follows by diagonalizing the matrices of order two appearing in the real Schur form of A. In general these matrices are non-degenerate and their two eigenvalues are each others complex conjugate. So if v and w are the right and left eigenvector, corresponding to one of the two eigenvalues, and normalized such that $w^*v = 1$ then the transformation matrix and its inverse are given by $Q = [v, \bar{v}]$ and $Q^{-1} = [w, \bar{w}]^*$, respectively. It is easy to show that we have to solve the complex system

$$(\frac{1}{\lambda}I_J - hJ)(I_J \otimes w^*)x = (I_J \otimes w^*)\tilde{b}$$

and its complex conjugate. These systems can be solved in two steps. In the first step we have to solve

$$(\frac{1}{\lambda}I_J - hJ)y = (I_J \otimes w^*)\tilde{b} \tag{4}$$

and its complex conjugate. Luckily only one of these equations needs to be solved, since the solutions of these systems are each others complex conjugate as well. In the second step we have to compute x from

$$(I_J \otimes w^*)x = y, \ (I_J \otimes w^T)x = \bar{y}.$$

These two equations are equivalent to $x = (I_J \otimes Q)z$, where $z_{2i-1} = y_i$ and $z_{2i} = \bar{y}_i$; due to the special form of Q the result is always real.

We have a MATLAB program of MRILU which can handle the complex system, but since run time measurement is difficult with MATLAB, I will use the FORTRAN code, which can handle the real case only.

The complexity of solving the above described systems compared to solving the system in a one-stage method can be estimated by assuming that all element-wise operations will become matrix operations with matrices of order p. So the complexity, when compared to a one-stage method, increases with a factor p^3 and p^2 for the factorization and solution phase, respectively. If the equations are solved via equation (4), the complex multiplications make the factorization 4 times as expensive as in the real case. Table 1 summarizes, for full systems with A of order 1,2 and 3 and for complex systems, the factors relevant to this study.

order A	1	2	3	complex
factorization	1	8	27	4
solving	1	4	9	4

Table 1: Estimated increase of the complexity compared to a one-stage method.

The estimates of the full systems with A of order 1 and 2 can also be used for the reduced system. I remark that these factors will give an overestimation since in MRILU only the diagonal is stored block-wise (blocks of order p in this case).

4 Stabilized Explicit RK

In order to have reference for the results of the implicit method we also consider an efficient explicit method: the Stabilized Explicit Runge-Kutta method (SRK).

It is shown in [4] that for real z the optimal stability polynomial is $R_m(z) = T_m(1 + z/m^2)$, where T_m is the Chebyshev polynomial of degree m. Since $R_m(0) = 1$ this can be rewritten in the form $R_m(z) = 1 + S_{m-1}(z)z$, where $S_{m-1}(z)$ is a polynomial formally given by

$$S_{m-1}(z) = (T_m(1 + z/m^2) - 1)/z.$$

(It can be shown that $S_{m-1}(z)$ is a polynomial approximation to the rational function $1/(1-z)$.) The SRK method associated herewith can be written as (cf. (1))

$$u_{k+1} = u_k + hS_{m-1}(hJ)F(u_k, t_k).$$

A straightforward comparison of IRK, using MRILU, and SRK is difficult to make. The qualities of the methods are different; e.g. SRK is only first-order accurate and its dissipation, dispersion and stability properties are very different from that of the Gauss methods. Moreover, I do not know how many digits MRILU should gain; this depends on the problem. By a proper extrapolation method, using results from previous time steps, this may only be a few. Notwithstanding these remarks I consider the SRK method to have some reference to an explicit method, such that an expert in the field can judge where use of MRILU is justified.

5 MRILU

MRILU is a multi-level preconditioner which in combination with a modern conjugate gradient type method such as BICGSTAB or GMRES yields an effective method to solve sparse linear systems. The factorization is a recursion in which in each step or level the system is reduced by eliminating the nearly uncoupled unknowns. Small elements are lumped onto the diagonal in order to have sufficiently large sets to be eliminated. Lumping makes the factorization exact for a constant vector, which gives us for elliptic problems nearly grid-independent convergence behaviour of the method. MRILU works for both structured and unstructured problems and can be applied to linear systems originating from coupled systems of partial differential equations. More details on the method can be found in [2].

6 Experiments

In the SRK method, the application of $S_{m-1}(hJ)$ means $m-1$ times a matrix-vector multiplication. Hence I simply compute the costs of one matrix-vector multiplication for the grid we consider in the experiments, $n = 128$, which is 0.013 seconds. For this purpose the structured matrix J is stored in an unstructured format (Compressed Sparse Row format) since MRILU is designed for unstructured matrices.

The smallest eigenvalue of J is -4, and hence the stability criterion for the SRK method is $h \leq m^2/2$ or if we choose m such that the method is stable we have $m \geq \sqrt{2h}$. Hence for the values of h to be used, $h = 1, 10, 100, 10000$, I need $m = 2, 5, 15, 142$ for stability.

In Table 2, I give in the case of the SRK method the number of .atrix-vector multiplications (MV), which is equal to $m-1$, and the .me these multiplications consume (S). In the case of the Gauss methods (indicated with the letter G and a number denoting the order of accuracy of the method) I give the number of levels in the factorization phase (L), the number of iterations (I) in the solution phase, the time for the factorization (F) and for the solution (S). All results are for $n = 128$ and I require that MRILU gains 6 digits on the preconditioned residual. For G2, G4 and G6 the order of A is 1, 2 and 3, respectively. By G6r I denote the case where the matrix A of G6 is reduced to a real Schur form with on the diagonal a scalar and a matrix of order 2. Only the solution time for the system with matrix of order 2 is shown. Observe that there is hardly any difference between the results from G4 and G6r.

In vertical direction we see the effect of increasing the dimension of A. Apart from the result for $h = 1$, we see that the increase in work for the factorization from $p = 1$ to 2 is between a factor 4 and 5. This is

h	1			10			100			10000	
	MV		S	MV		S	MV		S	MV	
SRK	1		0.13	4		0.52	14		1.8	141	
	L,I	F	S	L,I	F	S	L,I	F	S	L,I	F
G2	1,4	4.8	3.8	4,6	4.3	4.6	7,8	4.6	6.0	8,8	4.5
G4	1,4	13.	7.2	4,8	19.	15.	7,9	20.	17.	8,8	21.
G6r	1,4	13.	6.9	4,7	18.	13.	7,9	20.	17.	8,8	20.
G6	1,4	25.	12.	4,7	38.	22.	7,9	40.	29.	8,8	40.

Table 2: CPU times for $n = 128$ in tenths of seconds.

better than the expected factor 8 (see Table 1). In the solution phase we observe a factor between 2 and 3 which is also better then the expected factor 4. Similarly we see that the increase factor 27, expected when going from $p = 1$ to 3, is at most a factor 9 in the factorization phase and in the solution phase at most a factor 5. This overestimation was already foreseen when I introduced the estimates at the end of Section 3.

The results above make clear that it is worth-wile to make use of the real Schur form of A since for every h the sum of the CPU times of G2 (which I take here as a reasonable representative of the scalar part in the reduced system form of G6) and G6r is less than that of G6. Developing a variant of MRILU for complex matrices, originating from the complex system, seems not worth the effort, since this will make the method four times slower. Hence, in the factorization phase the CPU time will be comparable to that of G4 (and G6r) and in the solution phase even slower than that of G4 (and G6r).

With increasing h we see an increase of the number of levels in MRILU and consequently in the factorization time, though the latter is not proportional to the number of levels. In the first levels of the factorization phase the number of unknowns to be eliminated is larger than in the later levels and hence the first levels require more CPU time than the later ones. For the number of iterations and the solution time we see a similar effect, but they are more or less proportional to each other, which is due to the fact that the cost per iteration are approximately equal. So MRILU responds nicely to h; solving the equations becomes cheaper if h becomes smaller.

We see that the SRK method requires less CPU time for $h = 1, 10$ and 100. However, this outcome depends on the number of required digits to be gained by MRILU.

An interesting question is whether one should use a full-tableau Runge-Kutta method or use a diagonal implicit RK method (DIRK).

Assuming that the cost per stage of a DIRK method is equal to that of G2, then, using the real Schur form for A, we see that the CPU time per stage is only about twice that of a DIRK method in the factorization phase and even less than that in the solution phase. So per stage a full-tableau RK method is more expensive than a DIRK method. However this may be compensated for by the favourable qualities a full-tableau method can have.

Finally I remark that I also performed the computations for $n = 64$ and found very similar results. MRILU shows nearly grid-independent convergence for this model problem.

7 Conclusions

In this contribution the solution of systems arising in full-tableau Runge-Kutta methods have been studied. These methods are often avoided because of their computational intensity and storage requirements. By numerical experiments it is shown that the work per stage, using the reduction to real Schur form, is about twice that of a single-stage method. Since full-tableau have often favourable properties with respect to DIRK methods this method may be worth the effort. Also using the complex system will be per stage twice as expensive as a single-stage method. Hence, there seems to be no advantage of the complex system over the reduced system. Moreover we found that MRILU responds nicely to h; the solution time goes down for small h.

Finally, the subject dealt with here is of interest to our work and I also hope it interests Piet. At least it proves that my education at CWI on, among others, time integration methods was not in vain.

Acknowledgement

I thank mrs. Ena Tiesinga for her careful reading of the manuscript.

References

[1] E.F.F. Botta and A. van der Ploeg and F.W. Wubs. Nested grids ILU-decomposition (NGILU). *J. Comput. Appl. Math.*, 66:515-526, 1996

[2] E.F.F. Botta and F.W. Wubs. Matrix Renumbering ILU: An effective algebraic multilevel ILU-preconditioner for sparse matrices. *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 20(4):1007-1026, 1999.

[3] E. Hairer and G. Wanner. *Solving Ordinary Differential Equations II.* Springer-Verlag 1991.

[4] P.J. van der Houwen. *Construction of integration formulas for initial value problems*, North-Holland, Amsterdam, 1977.

[5] F.W. Wubs and E.D. de Goede. An explicit-implicit method for a class of time-dependent partial differential equations *Applied Numerical Mathematics* ,9:157-181,1992.

Met bijdragen van:

Christopher Baker
Jaco de Bakker
Freek Barning
Herman Bavinck
Guido Vanden Berghe
Herman Brunner
Dirk Dekker
Peter van Emde Boas
Gerrit Jan Förch
Jason Frank
Erik de Goede
Francien Goudsbloem
Jan de Groot
Arnold Heemink
Piet Hemker
Walter Hoffmann
Willem Hundsdorfer
Felice Iavernaro
Jan Kok
Tom Koornwinder
Barry Koren
Francesca Mazzia
Eleonora Messina
Wim Mol
Margreet Nool
Ayling Ong
Gerard van Oortmerssen
Ria van Ouwerkerk
Herman te Riele
Frank Roos
Ben Sommeijer
Edwin Spee
Marc Spijker
Theo van Stijn
Karl Strehmel
Jacques de Swart
Nico Temme
Donato Trigiante
Jan Verwer
Rüdiger Weiner
Piet Wesseling
Simone van der Wolff
Paul Wolkenfelt
Fred Wubs

Tobias Baanders